

I - التعداد و الحساب

" المبرهنة التمهيدية لـ Gauss "

مثال	
<p>المطلوب: بيّن أن 12 قاسم لـ 3525132.</p> <p><u>الحل:</u></p> <p>3 قاسم لـ 3525132 4 قاسم لـ 3525132 3 و 4 أوليان في ما بينهما</p> <p>إذا 3x4 قاسم لـ 3525132</p> <p>يعني " 12 قاسم لـ 3525132 " .</p> <p><u>أمثلة أخرى:</u></p> <p>كل عدد يقبل القسمة على 3 و 5 فهو يقبل القسمة على 15. كل عدد يقبل القسمة على 3 و 7 فهو يقبل القسمة على 21. كل عدد يقبل القسمة على 9 و 5 فهو يقبل القسمة على 45. والأمثلة متعدّدة</p>	<p>إذا $a \times b$ قاسم لـ c</p> <p>a قاسم لـ c b قاسم لـ c a و b أوليان في ما بينهما</p>
مثال	
<p>7 قاسم لـ $5a$</p> <p>إذا 7 قاسم لـ a.</p> <p>7 و 5 أوليان في ما بينهما</p>	<p>a قاسم لـ bc</p> <p>إذا a قاسم لـ c</p> <p>a و b أوليان في ما بينهما</p>

لبيقات

- 1 - إذا كان لنا 6 قاسم لـ $5^n a$ إذا 6 قاسم لـ a لأن 6 و 5^n أوليان في ما بينهما.
- 2 - بين أن $A = 3^{12} - 3^{11}$ هو عدد زوجي.

الحل:

$$A = 3^{12} - 3^{11} = (3 - 1) \times 3^{11} = 2 \times 3^{11}.$$

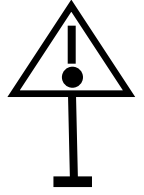
ومنه فإن A مضاعف لـ 2 يعني A عدد زوجي.

$$9^{23} - 4 \times 9^{22} = (9 - 4) \times 9^{22} = 5 \times 9^{22} \quad \text{3 - بين أن } (9^{23} - 4 \times 9^{22}) \text{ مضاعف لـ 5 :}$$

و بالتالي $(9^{23} - 4 \times 9^{22})$ مضاعف لـ 5 .

II - الجذر التربيعي

يجب أن نعلم :



إذا كان $x^2 = a$ فإن $x = \sqrt{a}$ أو $x = -\sqrt{a}$ بحيث $a \in \mathbb{R}_+$

القاعدة 1 :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad , \quad (a \in \mathbb{R}_+ , b \in \mathbb{R}_+)$$

استعملاتها:

$$a = \sqrt{75} - 7\sqrt{3} = \sqrt{25 \times 3} - 7\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = -2\sqrt{3}.$$

$$b = 8 \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}} - 6 \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{3}} = 8 \frac{\sqrt{5 \times 7}}{\sqrt{5}} - 6 \frac{\sqrt{3 \times 7}}{\sqrt{3}} = 8 \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}{\sqrt{5}} - 6 \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{7} - 6\sqrt{7} = 2\sqrt{7}.$$

القاعدة 2 :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad (a \in \mathbb{R}_+ , b \in \mathbb{R}_+^*)$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad , \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$$

استعملاتها:

$$a = \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{5\sqrt{3}}{10} + \frac{2\sqrt{3}}{10} = \frac{7\sqrt{3}}{10}.$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{5}} + \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

القاعدة 3 :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a \quad , \quad a \in \mathbb{R}_+$$

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

استعملاتها:

$$a = \sqrt{3}^8 = [(\sqrt{3})^2]^4 = 3^4 = 81.$$

$$b = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1 + 2 - \sqrt{2} = 1.$$

III - القوى في IR

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}^*$$

القاعدة 1

مثال:

$$(5\sqrt{3})^2 = 5^2 \times (\sqrt{3})^2 = 25 \times 3 = 75.$$

$$(-2\sqrt{7})^3 = (-2)^3 \times (\sqrt{7})^3 = -8 \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} \times \sqrt{7} = -8 \times 7 \times \sqrt{7} = -56\sqrt{7}.$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^*$$

القاعدة 2

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(\sqrt{2})^6 = (\sqrt{2^2})^3 = 2^3 = 8.$$

مثال:

$$(\sqrt{3})^8 = (\sqrt{3^2})^4 = 3^4 = 81.$$

$$a^n \times a^m = a^{n+m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}^*$$

القاعدة 3

$$(\sqrt{7})^{15} \times (\sqrt{7})^{-15} = (\sqrt{7})^{15+(-15)} = (\sqrt{7})^0 = 1.$$

مثال:

$$(\sqrt{5})^{-123} \times (\sqrt{5})^{125} = (\sqrt{5})^{-123+125} = (\sqrt{5})^2 = 5.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, n \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{R}^*; a \in \mathbb{R}^*$$

القاعدة 4

$$\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} = a^{-n}, n \in \mathbb{Z}; a \in \mathbb{R}^*$$

القاعدة 5

IV - الجذاءات المعتبرة

$$\left. \begin{aligned} (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 && \checkmark \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 && \checkmark \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2 && \checkmark \end{aligned} \right\}$$

النشر

تطبيقات:



$$A = (y + 3)^2 - y^2 = \cancel{y^2} + 2 \times y \times 3 + 3^2 - \cancel{y^2} = 6y + 9.$$

$$\begin{aligned} B &= (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 + 2\sqrt{35} = (\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{35} \\ &= 7 - 2\sqrt{35} + 5 + 2\sqrt{35} = 7 + 5 = 12. \end{aligned}$$

$$C = (3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

$$\left. \begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 && \checkmark \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 && \checkmark \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) && \checkmark \end{aligned} \right\}$$

التفكيك

تطبيقات:



$$A = 9 + 6x + x^2 = \underbrace{3^2 + 2 \times 3 \times x + x^2}_{a^2 + 2 \times a \times b + b^2} = (3 + x)^2.$$

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = (a + b)^2.$$

$$B = 9y^2 - 6y\sqrt{5} + 5 = \underbrace{(3y)^2 - 2 \times 3y \times \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}_{a^2 - 2 \times a \times b + b^2} = (3y - \sqrt{5})^2.$$

$$a^2 - 2 \times a \times b + b^2 = (a - b)^2.$$

$$C = 16x^2 - 5 = \underbrace{(4x)^2 - (\sqrt{5})^2}_{a^2 - b^2} = (4x - \sqrt{5})(4x + \sqrt{5}).$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

$$\begin{aligned} D &= (5x + 4)^2 - 9 = (5x + 4)^2 - 3^2 = \left[(5x + 4) - 3 \right] \times \left[(5x + 4) + 3 \right] \\ &= (5x + 4 - 3)(5x + 4 + 3) = (5x + 1)(5x + 7). \end{aligned}$$

V - الترتيب والمقارنة

عموماً:

$$\begin{aligned} a \leq b & \text{ يعني } (a - b) \in IR_- \\ a \geq b & \text{ يعني } (a - b) \in IR_+ \end{aligned}$$

I الترتيب والجمع:

- ❖ $a \leq b$ يعني $a + C \leq b + C$ (لا يتغير اتجاه الترتيب عند إضافة نفس القيمة) .
- ❖ $a \leq b$ يعني $a - C \leq b - C$ (لا يتغير اتجاه الترتيب عند حذف نفس القيمة) .
- ❖ $a \leq b$ و $c \leq d$ إذا !! $a + C \leq b + d$ (جمع الحدود مثنى مثنى لا يتغير اتجاه الترتيب) .

II للترتيب والضرب:

- 1) الحالة الأولى: " الضرب في عدد موجب لا يغير اتجاه الترتيب "
 - ❖ إذا كان لنا: $C \in IR_+^*$ فإن $a \leq b$ يعني $a \times C \leq b \times C$.
- 2) الحالة الثانية: " الضرب في عدد سالب يغير اتجاه الترتيب "
 - ❖ إذا كان لنا: $C \in IR_-^*$ فإن $a \leq b$ يعني $a \times C \geq b \times C$.
- 3) الحالة الثالثة: " ضرب حدود جميعها سالبة مثنى مثنى "
 - ❖ إذا كان لنا: $a \in IR_-$, $b \in IR_-$, $C \in IR_-$, $d \in IR_-$ فإن: $a \leq b$ و $c \leq d$ يعني $a \times C \geq b \times C$.
- 4) الحالة الرابعة: " ضرب حدود جميعها موجبة مثنى مثنى "
 - ❖ إذا كان لنا: $a \in IR_+$, $b \in IR_+$, $C \in IR_+$, $d \in IR_+$ فإن: $a \leq b$ و $c \leq d$ يعني $a \times C \leq b \times C$.

III للترتيب والمقلوب:

- ليكن $a \in IR^*$ و $b \in IR^*$ بحيث a و b لهما نفس العلامة إذا :
 - ❖ $a \leq b$ يعني $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

IV الترتيب والمربع:

- ❖ $a \in IR_+$, $b \in IR_+$: $a \leq b$ يعني $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ يعني $a^2 \leq b^2$.
- ❖ $a \in IR_-$, $b \in IR_-$: $a \leq b$ يعني $|a| \geq |b|$ يعني $a^2 \geq b^2$.

VI - الحصر والمجالات

VII - المعادلات والمتراجحات

VIII طالس

