الباب 5

التـــرتيب والمقارنة والحصر في $\mathbb{R}$

1)الترتيب والجمع　　2) الترتيب والضرب　　3) مقارنة المقلوب ومقارنة المربعين

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
الاصلاح على الموقع : l'apothème

I – مقارنة عددين حقيقيين :

1) خاصية :

a و b عددان حقيقيان .

$a-b \in \mathbb{R}^-$ يعني $a \leq b$

$a-b \in \mathbb{R}^+$ يعني $a \geq b$

2) – أمثلة :

1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right)=2\sqrt{2}-4-\sqrt{3}+5$$
$$=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4$$
$$=\sqrt{3}+1$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1 \geq 0$ فإن : $\left(2\sqrt{3}-4\right)-\left(\sqrt{3}-5\right) \geq 0$ و منه فإن :

$\underline{2\sqrt{3}-4 \geq \sqrt{3}-5}$

2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x=y-3$.

لدينا : $x-y=-3$

و بما أن : $-3 \leq 0$ فإن : $x-y \leq 0$ وبالتالي : $\underline{x \leq y}$

II – الترتيب و العمليات :

1) – الترتيب و الجمع :

أ) - خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \le b$ فإن $a+c \le b+c$

إذا كان $a+c \le b+c$ فإن $a \le b$

* مثال : نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.

لنقارن العددين -2 و $x-5$.

لدينا : $x < 3$ يعني أن :
$$x+(-5) < 3+(-5)$$
$$x-5 < 3-5$$

و بالتالي فإن : $\underline{x-5 < -2}$

ب) - خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ و فإن $a+c \le b+d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $2 > y$.

لنبين أن : $x+y < 5$.

لدينا : $\left.\begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array}\right\}$ يعني أن : $\left.\begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array}\right\}$ إذن : $x+y < 2+3$

و باتالي فإن : $\underline{x+y < 5}$

2) – الترتيب و الضرب :

أ) - خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

$a \le b$ و $c \prec 0$ يعني $a \times c \le b \times c$

$a \le b$ و $c \succ 0$ يعني $a \times c \ge b \times c$

* مثال :

◊ نفترض : $a \leq \sqrt{5}+1$ برهن أن $\left(\sqrt{5}-1\right)a \leq 4$.

لدينا $\sqrt{5}-1 \in \mathbb{R}^{+}$ و $a \leq \sqrt{5}+1$ اذن

$\left(\sqrt{5}-1\right)a \leq \underbrace{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}_{4}$. ومنه $\underline{\left(\sqrt{5}-1\right)a \leq 4}$

◊ نفترض : $a \prec 2\sqrt{3}$ برهن أن $-\sqrt{3}a \succ -6$

لدينا $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}^{-}$ و $a \prec 2\sqrt{3}$ اذن $-\sqrt{3}a \succ \underbrace{-\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}}_{-6}$ ومنه

$\underline{-\sqrt{3}a \succ -6}$

ب) - خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية موجبة.

إذا كان $\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ \text{و} \\ c \leq d \end{array}\right\}$ فإن $a\times c \leq b\times d$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x < \sqrt{3}$ و $y < 2\sqrt{6}$.

لنبين أن : $xy < 6\sqrt{3}$.

لدينا :

$\left.\begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array}\right\}$ و اذن :

$x\times y < \sqrt{3}\times 2\sqrt{6}$

$xy < 2\sqrt{3\times 6}$

$xy < 2\sqrt{18}$

$xy < 2\sqrt{9\times 2}$

$xy < 2\sqrt{3^2\times 2}$

$xy < 2\times 3\sqrt{2}$

وبالتالي فإن : $xy < 6\sqrt{2}$

3) – الترتيب و المقلوب :

أ) - **خاصية :**

a و b عددان حقيقيان موجبان قطعا .

إذا كان $a \le b$ فإن $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$

إذا كان $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$ فإن $a \le b$

ب) - **مثال :** لدينا : $5 \le 20$ لكن

$\frac{1}{5} = 0,2$; $\frac{1}{20} = 0,05$; $0,2 \ge 0,05$

$5 \le 20$ لكن $\frac{1}{5} \ge \frac{1}{20}$

4) – الترتيب و المربع :

أ) - **خاصية ① :**

a و b عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a \le b$ فإن $a^2 \le b^2$

إذا كان $a^2 \le b^2$ فإن $a \le b$

* مثال :

$5 \le 11$ ولدينا $11^2 = 121$; $5^2 = 25$ ونلاحظ ان $25 \le 121$

$50 \ge 49$ ولدينا اي $(5\sqrt{2})^2 \ge 7^2$ ومنه $5\sqrt{2} \ge 7$

ب) - **خاصية ② :**

a و b عددان حقيقيان سالبان .

إذا كان $a \le b$ فإن $a^2 \ge b^2$

إذا كان $a^2 \ge b^2$ فإن $a \le b$

* مثال :

لنقارن العددين : $-\sqrt{6}$ و $-3\sqrt{2}$.

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{6}^2=6\\ \left(3\sqrt{2}\right)^2=18\end{array}\right\}$ إذن $\sqrt{6}^2 \leq \left(3\sqrt{2}\right)^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي

فإن : $\underline{-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}}$

5) – الترتيب و الجذر التربيعي :

أ) - خاصية :

a و b عددان حقيقيان موجبان .

إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

1) – لنقارن العددين : $\sqrt{10}$ و $3\sqrt{3}$.

لدينا :

و $\left.\begin{array}{l}\sqrt{10} = \sqrt{10}\\ 3\sqrt{3}=\sqrt{9}\sqrt{3}=\sqrt{27}\end{array}\right\}$ لدينا $10 \prec 27$ و منه فإن $\sqrt{10} \prec \sqrt{27}$ اي $\underline{\sqrt{10} \prec 3\sqrt{3}}$

III – الحصر :

1) – حصر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

$x \leq a \leq y$ و $z \leq b \leq t$

$x+z \leq a+b \leq y+t$

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 8$ و $-4 \leq y \leq 2$

لنحصر $x+y$.

لدينا : $3+(-4) \leq x+y \leq 8+2$

إذن : $\underline{-1 \leq x+y \leq 10}$

2) – حصر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي بحيث : $x \le a \le y$

سيكون لدينا : $-y \le -a \le -x$

3) – حصر فرق عددين حقيقيين :

ملاحظة هامة : لحصر $a-b$ ، نكتب $a-b=a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$ ؛ لنحصر $x-y$.

لدينا : $-2 \le -y \le 4$ و $3 \le x \le 8$ إذن : $3-2 \le x+(-y) \le 8+4$

و منه فإن : $1 \le x-y \le 12$

4) – حصر جذاء عددين حقيقيين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

$x \times z \le a \times b \le y \times t$

* مثال 1 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $1 \le y \le 3$ ؛ لنحصر $x \times y$.

لدينا : $3 \times 1 \le x \times y \le 7 \times 3$ إذن : $3 \le x \times y \le 21$

* مثال 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5 \le x \le -2$ و $3 \le y \le 6$ ؛ لنحصر $x \times y$.

لدينا : $2 \le -x \le 5$ إذن : $2 \times 3 \le (-x) \times y \le 5 \times 6$ أي
$6 \le -xy \le 30$

و منه فإن : $-30 \le xy \le -6$.

5) – حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة

و حيث : $x \le a \le y$

لدينا : $\frac{1}{y} \le \frac{1}{a} \le \frac{1}{x}$

6) – حصر خارج عددين :

ملاحظة هامة : لحصر $\frac{a}{b}$ ، نكتب $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

*مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 7$ و $5 \le y \le 9$ ؛ لنحصر $\frac{x}{y}$.

لدينا : $\frac{1}{9} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{5}$ إذن : $3 \times \frac{1}{9} \le x \times \frac{1}{y} \le 7 \times \frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}$

و بالتالي فإن : $\underline{\frac{1}{3} \le \frac{x}{y} \le \frac{7}{5}}$

*** تمرين تطبيقي محوصل :**

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $6 \le a \le 8$ و $-4 \le b \le -2$ و $-3 \le c \le 5$

أحصر : a^2 و b^2 و $a + 2b - 4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحـل :

1) – حصر a^2 .

لدينا : $6^2 \le a^2 \le 8^2$ و منه فإن : $\underline{36 \le a^2 \le 64}$

2) – حصر b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \le b^2 \le (-4)^2$ و منه فإن : $\underline{4 \le b^2 \le 16}$

3) – حصر $a + 2b - 4c$.

لدينا : $-8 \le 2b \le -4$ و $-4 \times (-3) \le -4c \le -4 \times 5$ أي $12 \le -4c \le 20$

إذن : $6+(-8)+12\leq a+2b-4c\leq 8+(-4)+20$

و منه فإن : $\underline{10\leq a+2b-4c\leq 24}$

4) – حصر $\dfrac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4)\leq a+b\leq 8+(-2)$ أي $2\leq a+b\leq 6$ و $\dfrac{1}{16}\leq \dfrac{1}{b^2}\leq \dfrac{1}{4}$

إذن : $2\times\dfrac{1}{16}\leq (a+b)\times\dfrac{1}{b^2}\leq 6\times\dfrac{1}{4}$ أي $\dfrac{2}{16}\leq \dfrac{a+b}{b^2}\leq \dfrac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\underline{\dfrac{1}{8}\leq \dfrac{a+b}{b^2}\leq \dfrac{3}{2}}$

خطأ شائع

1) $-4x\leq 12\Rightarrow \cancel{x\leq \dfrac{12}{-4}}\Rightarrow x\leq -3$ اصلح الخطأ

2) $x\leq y\Rightarrow \cancel{x^2\leq y^2}$ مثال : $-5<2$ لكن $25>4$ اصلح الخطأ

3) $\left.\begin{array}{l} a\leq x\leq b \\ a'\leq x'\leq b' \end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{a-a'\leq x-x'\leq b-b'}$ اصلح الخطأ .

4) الاعداد a و b و a' و b' موجبة قطعا : $\left.\begin{array}{l} a\leq x\leq b \\ a'\leq x'\leq b' \end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{\dfrac{a}{a'}\leq \dfrac{x}{x'}\leq \dfrac{b}{b'}}$

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
الاصلاح على الموقع : l'apothème

تمارين

◊ **تمرين1:**

قارن العددين a و b في كل حالة من الحالات الآتية :

a	$5+2\sqrt{2}$	$\frac{21}{3}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{16}{11}$	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{5}+1$	$2\sqrt{2}+1$	$-4\sqrt{5}$
b	$5+\sqrt{10}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{15}{14}$	$\frac{7}{8}$	$-\frac{11}{6}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{7}+2$	$7+\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$
المقارنة	...	$a \succ b$	.....	....	....	....	....	....	....
a	$5-2\sqrt{2}$	$\frac{21}{33}$	$0,1$	$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$	$2\sqrt{7}$	$\frac{3\sqrt{2}}{5}$
b	$5-\sqrt{13}$	$\frac{20}{33}$	$\frac{1}{11}$	$-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$	$\frac{-2}{\sqrt{2}}$	$-4\sqrt{2}$	$\frac{5}{2}$	$2,12$	$\frac{\sqrt{7}}{5}$
المقارنة	...	....	.....	....	....	....	$a \prec b$	....	....

◊ **تمرين2:**

نعتبر عددين حقيقيين موجبين قطعا a و b حيث $a \prec b$. قارن بين :

1. $\frac{5}{4}b+2$; $\frac{2}{3}a-1$.
2. $2a+6b$; $5a+3b$.
3. b^2-a ; a^2-b .
4. $4a^2+b^2$; $4ab-1$.

◊ **تمرين3:**

1. x و y عددان حقيقيان بحيث : $x \leq y$. أثبت أن :

$$x\sqrt{7} \leq 3y\sqrt{2} \quad ; \quad x-\sqrt{11} \leq y+\sqrt{2} \quad ; \quad x+\sqrt{5} \leq y+\sqrt{7}$$

$$2x+\frac{1}{\sqrt{7}}\leq 3y+\frac{1}{\sqrt{5}} \quad ; \qquad \frac{x}{2\sqrt{5}}\leq\frac{y}{3\sqrt{2}}$$

2. a و b عددان حقيقيان بحيث : $a>b$. بين أن :

$$5a>4a+b \text{ ؛ } 5a>3a+2b \text{ ؛ } a>b-\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ؛ } -7a+4b<-3b \text{ ؛}$$

$$a\sqrt{2}+b>b\left(\sqrt{2}+1\right)$$

◊ <u>**تمرين4:**</u>

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a\geq -12$ و $b\leq 5$. بين أن :

$$a+\frac{1}{2}\geq\frac{-23}{2} \quad ; \quad b-7\leq -2 \quad ; \quad a-1{,}5\geq -13{,}5 \quad ; \quad b+\frac{3}{4}\leq\frac{23}{4}$$

$$\frac{1}{2}a\geq -6 \quad ; \quad \frac{7}{5}b\leq 7 \quad ; \quad -3a\leq 36 \quad ; \quad -\frac{4}{3}b\geq -\frac{20}{3}$$

$$a-b\geq -17 \quad ; \quad b-a\leq 17$$

◊ <u>**تمرين5:**</u>

x و y عددان حقيقيان بحيث : $\frac{2}{5}\leq x\leq 1$ و $-5\leq y\leq\frac{3}{2}$

أحصر ما يلي : $x+\frac{7}{5}$; $y-\frac{1}{2}$; $x-\frac{6}{11}$; $y+\frac{3}{5}$

$$5x \quad ; \quad -\frac{7}{5}x \quad ; \quad 2y \quad ; \quad \frac{-3}{2}y$$

$$2x-3y \quad ; \quad x-y \quad ; \quad 3x+5y \quad ; \quad x+y$$

$$-3x+y+\frac{1}{2} \quad ; \quad -x-2y-22 \quad ; \quad 3x+5y+11$$

$$\frac{3x-5y+4}{-2} \quad ; \quad \frac{-2x+y}{-3}+1 \quad ; \quad \frac{x+y}{2}$$

◊ **تمرين6:**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x<y$ ؛ أثبت أن : $x<\frac{x+y}{2}<y$ و أن : $x<\frac{2x+3y}{5}<y$.

◊ **تمرين7:**

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $a+c\leq b$.

بين أن : $a\leq b-c$ و $a+c-b\leq 0$ و $a+2c\leq b+c$ و $2a\leq a+b-c$

◊ **تمرين8:**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x\leq 5$ و $y\geq 2$ ؛ أثبت أن :

$2x-4y\leq 2$; $11-2y\leq 7$; $7-x\geq 2$; $3x+5\geq -1$; $2x-1\leq 9$

$\frac{-5x+y}{6}\geq\frac{-9}{2}$; $\frac{6y-2}{7}\geq -2$; $\frac{5x+1}{4}\leq 4$

◊ **تمرين9:**

نعتبر عددين حقيقيين موجبين قطعا a و b حيث $a\prec b$. قارن بين :

1 - $\frac{ab}{a+b}$; $\frac{a+b}{4}$.

2 - $\frac{2}{2a+6b}$; $\frac{\pi}{5a+3b}$.

3 - $\sqrt{\frac{23}{b}}$; $\frac{5}{\sqrt{a}}$.

4 - $b\left(\sqrt{13}-a\right)$; $a\left(\sqrt{13}-b\right)$.

◊ **تمرين10:**

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين :

$a=\frac{12\sqrt{2}-18}{\sqrt{18}}$ و $b=\sqrt{14}+\sqrt{45}-\sqrt{20}-3\sqrt{5}$.

ا- بين ان $a=2-1{,}5\sqrt{2}$ و $b=\sqrt{14}-2\sqrt{5}$.

ب- ماهي علامة كل من a و b ؟ علل جوابك.

ت- احسب a^2 و b^2 .

ج- قارن بين a^2 و b^2 ثم استنتج مقارنة بين a و b .

◊ **تمرين11:**

a و b و x أعداد حقيقية موجبة قطعا.

1) – بين أن : $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

2) – استنتج أن : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$ و أن $(a+b)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$

◊ **تمرين12:**

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا بحيث : $x+\frac{1}{y}\geq 2$ و $y+\frac{1}{x}\geq 2$ و $x+y=1$.

1) – بين أن : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq 3$.

2) – استنتج أن : $xy\leq\frac{1}{3}$.

◊ **تمرين13:**

a و b عددان حقيقيان موجبان .

1) – بين أن : $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$.

2) – استنتج مقارنة العددين : $\sqrt{ab}$ و $\frac{a+b}{2}$.

◊ **تمرين14:**

a و b عددان حقيقيان موجبان حيث $a \prec b$. اختصر العبارات التالية :

العبارة	الاختصار
$H = \|2(a-b)-3\| + b + a - 1$	
$K = \|-a+b+7\| + \|b-a\|$	
$L = \sqrt{(a+b+1)^2} + \|-a-6\|$	

◊ **تمرين15:**

a و b و c أعداد حقيقية موجبة .

1) – بين أن : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

2) – استنتج أن : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

◊ **تمرين16:**

a و b عددان حقيقيان موجبان حيث $a \prec b$.

أ) بين ان $a^2 \prec ab \prec b^2$.

ب) استنتج ان $a \prec \sqrt{ab} \prec b$.

ت) بين اذن ان $\frac{113}{27} \prec \sqrt{35} \prec \frac{945}{113}$

◊ **تمرين17:**

x عدد حقيقي ؛ اكمل الجدول التالي بـــ $\prec$ او $\succ$:

$x+2,3 \quad ... \quad x+\sqrt{7}$	$\frac{3}{5}x+\frac{3}{2} \quad ... \quad \frac{3}{5}x+\frac{7}{6}$	$\frac{2}{3}x-\frac{8}{7} \quad ... \quad -\frac{7}{2}+\frac{2}{3}x$

◊ **تمرين18:**

نعتبر x و y عددين حقيقيين بحيث : $x \geq 5$ و $y \geq -1$ ؛ أثبت أن :

$$2x+7y \geq 3 \quad ؛ \quad -5x-3y \leq -22 \quad ؛ \quad \frac{x+y}{2} \geq 2 \quad ؛ \quad -3x-\frac{1}{2}y+5 \leq \frac{-19}{2}$$

◊ **تمرين19:**

a و b و c أعداد حقيقية بحيث: $2 \leq a \leq 5$ و $-3 \leq b \leq -1$ و $-2 \leq c \leq 3$

العبارة	a^2+b-c	$-2a+\frac{3}{4}$	$5a-2b+5c$	$-4c-1$	$\frac{3a+2b}{3}$	$\frac{-a+b(c+3)}{2}$
الحصر						

◊ **تمرين20:**

نعتبر x و y عددين حقيقيين بحيث : $-9 \leq 2x+3 \leq 7$ و $\frac{-7}{2} \leq \frac{3y-1}{2} \leq -2$.

أثبت أن : $-6 \leq x \leq 2$ و $-2 \leq y \leq -1$

◊ **تمرين21:**

نعتبر x و y عددين حقيقيين بحيث : $x \geq 1$ و $y \geq 1$.

1) – بين أن : $xy \geq y$ و $xy \geq x$.

2) – استنتج أن : $x+y \leq 2xy$.

3) – قارن اذن بين : $\sqrt{8}+\sqrt{12}$ و $8\sqrt{6}$.

◊ **تمرين22:**

a و b عددان حقيقيان بحيث : $a \leq b$.

1) – أثبت أن : $2a \leq a+b \leq 2b$.

2) – استنتج أن : $a \leq \frac{a+b}{2} \leq b$.

◊ **تمرين23:**

a و b و c أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $a \le b$.

1) – برهن أن : $\dfrac{a+c}{b+c} \le 1$.

2) – قارن اذن بين : 1 و $\dfrac{\pi+4\sqrt{2}}{5+\sqrt{32}}$

◊ **تمرين24:**

a و b عددان حقيقيان.

1) – قارن العددين : $4ab$ و $(a+b)^2$ ، ثم استنتج أنه إذا كان $a+b=1$ فإن : $ab \le \dfrac{1}{4}$.

2) – قارن العددين : $-4ab$ و $(a-b)^2$ ، ثم استنتج أنه إذا كان $a-b=1$ فإن : $ab \ge -\dfrac{1}{4}$.

◊ **تمرين25:**

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين : $\mathrm{q}=\sqrt{98}-\sqrt{18}$ و $\mathrm{p}= 3-\sqrt{5}\ ^{2} -2.\ 2,5-\sqrt{45}$

أ- بين ان $\mathrm{p}=9$ و $\mathrm{q}=4\sqrt{2}$.

ب- ليكن العدد الحقيقي $\mathrm{t}=9+4\sqrt{2}$ ؛ بين أن $\mathrm{t}-13=4\left(\sqrt{2}-1\right)$ ثم استنتج أن $\mathrm{t}\succ 13$.

ج- بين ان $\mathrm{t}= 1+2\sqrt{2}\ ^{2}$ ثم استنتج مقارنة بين $1+2\sqrt{2}$ و $\sqrt{13}$.

د- بين ان $\dfrac{\sqrt{13}}{\pi} \succ \dfrac{1+2\sqrt{2}}{3}$.

◊ **تمرين26:**

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $2 \le x \le 7$ و $-7 \le y \le -1$ و $-5 \le z \le 3$

اجب بـــــــــ" خطأ " او " صواب "

$0,4 \le \dfrac{x(z+6)}{5} \le 12,6$	$-49 \le xy \le -2$	$-35 \le -2x+3y \le -7$	$9 \le x-y \le 8$	$-5 \le x+y \le 6$

◊ **تمرين27:**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $6 \le x \le 8$ و $-5 \le y \le -2$

العبارة	الحصر
$x+y$	$1 \le x+y \le 6$
$x-y$	
xy	
$\dfrac{x}{y}$	
x^2	
y^2	
$(x+y)^2$	$1^2 \le (x+y)^2 \le 6^2$ أي ....
$(x-y)^2$	
$(x-y)(x+y)$	

◊ **تمرين28:**

x عدد حقيقي ؛ أوجد حصرا للعدد x في كل حالة من الحالات الآتية :

$$-4 \le 2x+3 \le 5 \quad ; \quad -11 \le 5-2x \le -2$$

$$5 \le 7x-1 \le 12 \quad ; \quad -1 \le \frac{4x-1}{2} \le 7$$

◊ **تمرين29:**

a و b عددان حقيقيان بحيث : $3 \le a \le 6$ و $-5 \le b \le -3$.

1) – اوجد حصرا لـ $a+b$ و a^2 .

2) – بين أن : $-60 \le 2ab \le -18$ وان $9 \le b^2 \le 25$.

3) – لماذا لا يمكن حصر $(a+b)^2$ ؟

4) – بين أن : $-51 \leq a^2+2ab \leq 18$.

5) – استنتج من خلال 2) و 4) أن : $0 \leq (a+b)^2 \leq 43$.

6) – أحصر : a^2-b^2 .

◊ **تمرين30:**

a و b عددان حقيقيان موجبان . برهن أن : $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

◊ **تمرين31:**

نعتبر العددين الحقيقيين التاليين : $a=\sqrt{45}-\left(\sqrt{20}-1\right)$ و $b=\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$.

أ- بين ان : $a=\sqrt{5}+1$ و $b=\sqrt{3}+2$.

ب- احسب a^2 و b^2 .

ج- قارن بين $2\sqrt{5}$ و $4\sqrt{3}$ ثم استنتج مقارنة بين a^2 و b^2 .

د- بين أن : $a \prec b$ ثم استنتج مقارنة بين $\dfrac{\sqrt{5}}{a+1}$ و $\dfrac{2}{b+\pi}$.

هـ- بين ان : $|a-4|-|a-b|+|b-3|=1$.

◊ **تمرين32:**

نعتبر العدد الحقيقي a حيث : $-1 \leq a \leq 3$.

1. بين ان : $|-a+4|-|a-5|=-1$.
2. انشر العبارة $(-a+4)(a-5)$ ثم استنتج حصرا لـ $a^2-9a+20$.
3. فكك العبارة a^2+4a+4 ثم استنتج ان: $-3 \leq a^2+4a \leq 21$.
4. لتكن العبارة $A=\dfrac{2a-1}{a+2}$.

أ- بين أن $(a+2) \neq 0$.

ب- اثبت أن $A=2-\dfrac{5}{a+2}$ واستخلص حصرا للعبارة A .

◊ **تمرين33:**

ليكن a و b عددين حقيقيّين موجبين .

أ) أنشر العبارة : $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$.

ب) قارن $\dfrac{a+b}{2}$ و $\sqrt{ab}$.

ج) تحقق من مقارنتك في حالة أنّ : $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ و $b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

د) متى يكون : $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ ؟

◊ **تمرين34:**

x عدد حقيقي موجب قطعا .

أ - قارن بين $\dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{1}{x+2}$ ثمّ بين $\dfrac{1}{3}$ و $\dfrac{1}{x+3}$

ب - إستنتج أنّ $\dfrac{6}{(x+2)(x+3)} \prec 1$

◊ **تمرين35:**

نعتبر العددين الحقيقيين a و b بحيث $a \succ 1$ و $b \succ 1$ و $a \succ b$.

رتب تنازليا الاعداد : $\dfrac{a}{b}$ و $\dfrac{a+1}{b+1}$ و $\dfrac{a-1}{b-1}$

◊ **تمرين36:**

حقل مستطيل الشكـل طوله محصور بين 12 m و 14 m و عرضه محصور بين 7 m و 10 m .

1) – أعط حصرا لمحيط هذا المستطيل.

2) – أعط حصرا لمساحة هذا المستطيل.

◊ **تمرين37:**

نعتبر العددين الحقيقيين a و b التاليين : $a=3\sqrt{20}-\sqrt{54}+2\sqrt{24}-\sqrt{125}$ و $b=3\left(\dfrac{5-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\right)^{-1}$

1.بين ان : $a=\sqrt{5}+\sqrt{6}$ و $b=2+\sqrt{7}$.
2. احسب a^2 و b^2 ثم قارنهما .
3.استنتج مقارنة لـ a و b ثم لـ $\frac{3}{a}$ و $\frac{\pi}{b}$.
4.قارن بين: $\frac{4}{a+b}$ و $\frac{a+b}{ab}$.

◊ **تمرين38:**

ABC مثلث متقايس الاضلاع طول ضلعه $5t\sqrt{6}$ cm ؛ ما هو الشرط على t حتى لا يتجاوز الارتفاع القيمة $15\sqrt{2}\ cm$ ؟

◊ **تمرين39:**

دائرة شعاعها r بحيث $5\le r\le 7$ بالصم .
1) اوجد حصرا لـــــ $\mathscr{L}$ محيط الدائرة اذا افترضنا ان $3,14\le\pi\le 3,15$.
2) اوجد حصرا لـــــ $\mathscr{A}$ مساحة الدائرة اذا افترضنا ان $3\le\pi\le 4$.

◊ **تمرين40:**

a و b و c أعدد حقيقيان موجبان قطعا.

1) – برهن أن : $\frac{ab}{a+b}\ge\frac{a+b}{4}$.

2) – استنتج أن : $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ac}{a+c}\le\frac{a+b+c}{2}$

مرجع هذه السلسلة : الكتاب الموازي " الثبات في الرياضيات "
تأليف : الاستاذان " طارق الشتوي & كمال الغربي "
الاصلاح على الموقع : l'apothème