

1_ مقارنة عددين حقيقيين :

(1) - قاعدة ① :

a و b عدنان حقيقيان .
إذا كان $a - b \leq 0$ فإن $a \leq b$
إذا كان $a - b \geq 0$ فإن $a \geq b$

(2) - أمثلة :

(1) -- لنقارن العددين : $2\sqrt{3}-4$ و $\sqrt{3}-5$

لدينا :

$$\begin{aligned}(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) &= 2\sqrt{3}-4-\sqrt{3}+5 \\ &= 2\sqrt{3}-\sqrt{3}+5-4 \\ &= \sqrt{3}+1\end{aligned}$$

و بما أن : $\sqrt{3}+1 \geq 0$ فإن : $(2\sqrt{3}-4) - (\sqrt{3}-5) \geq 0$

و منه فإن : $2\sqrt{3}-4 \geq \sqrt{3}-5$

(2) -- لنقارن العددين : x و y بحيث : $x = y - 3$

لدينا : $x - y = -3$

و بما أن : $-3 \leq 0$ فإن : $x - y \leq 0$

و منه فإن : $x \leq y$

I_ الترتيب و المقارنة :

(1) - الترتيب و الجمع :

(أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a+c \leq b+c$
إذا كان $a \geq b$ فإن $a+c \geq b+c$

* مثال :

نعتبر x عددا حقيقيا بحيث : $x < 3$.
لنقارن العددين -2 و $x - 5$.

لدينا : $x < 3$

يعني أن :

$$x + (-5) < 3 + (-5)$$

$$x - 5 < 3 - 5$$

و بالتالي فإن : $x - 5 < -2$

(ب) -- خاصية ② :

a و b و c و d أعداد حقيقية .

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان } a + c \leq b + d \text{ فإن } \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ و } \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ فإن } a + c \leq b + d$$

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x < 3$ و $2 > y$.
لنبين أن : $x + y < 5$.

$$\left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{ يعني أن } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{ لدينا :}$$

$$\text{ إذن : } x + y < 2 + 3$$

و بالتالي فإن : $x + y < 5$

(2) – الترتيب و الضرب :

(أ) -- خاصية ① :

a و b و c أعداد حقيقية .

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c > 0$ فإن $a \times c \leq b \times c$

إذا كان $a \leq b$ و $c < 0$ فإن $a \times c \geq b \times c$

* مثال :

$$\text{ لدينا : } 11 \leq 27 \text{ يعني أن } 11 \times 5 \leq 27 \times 5$$

$$11 \times (-4) \geq 27 \times (-4) \quad \text{يعني أن} \quad 11 \leq 27$$

(ب) -- خاصية ② :

$$\begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ و } c \text{ و } d \text{ أعداد حقيقية.} \\ \left. \begin{array}{l} a \leq b \\ c \leq d \end{array} \right\} \text{ إذا كان} \\ \text{فإن } a \times c \leq b \times d \end{array}$$

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان موجبان بحيث : } x < \sqrt{3} \text{ و } y < 2\sqrt{6}$$

$$\text{لنبين أن : } xy < 6\sqrt{3}$$

لدينا :

$$\left. \begin{array}{l} x < \sqrt{3} \\ y < 2\sqrt{6} \end{array} \right\} \text{ يعني أن : } x \times y < \sqrt{3} \times 2\sqrt{6}$$

$$xy < 2\sqrt{3 \times 6}$$

$$xy < 2\sqrt{18}$$

$$xy < 2\sqrt{9 \times 2}$$

$$xy < 2\sqrt{3^2 \times 2}$$

$$xy < 2 \times 3\sqrt{2}$$

$$xy < 6\sqrt{2} \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

(3) – الترتيب و المقلوب :

(أ) -- خاصية :

$$\begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ عدان حقيقيان موجبان قطعا.} \\ \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ فإن } a \leq b \\ \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \text{ فإن } a \leq b \end{array}$$

(ب) -- مثال :

$$\text{لدينا : } 7 \leq 13 \quad \text{يعني أن} \quad \frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$$

$$\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5} \quad \text{يعني أن} \quad 11 \geq 5$$

(4) – الترتيب و المربع :

(أ) -- خاصية ① :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \leq b^2$
إذا كان $a^2 \leq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$$5 \leq 11 \quad \text{يعني أن} \quad 5^2 \leq 11^2 \quad \text{أي} \quad 25 \leq 121 .$$

(ب) -- خاصية ② :

a و b عدنان حقيقيان سالبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $a^2 \geq b^2$
إذا كان $a^2 \geq b^2$ فإن $a \leq b$

* مثال :

$$-7 \leq -2 \quad \text{يعني أن} \quad (-7)^2 \geq (-4)^2 \quad \text{أي} \quad 49 \geq 16$$

(5) – الترتيب و الجذر المربع :

(أ) -- خاصية :

a و b عدنان حقيقيان موجبان .
إذا كان $a \leq b$ فإن $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
إذا كان $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ فإن $a \leq b$

* أمثلة :

$$(1) - \text{لنقارن العددين} \quad \sqrt{10} \quad \text{و} \quad 3\sqrt{3} .$$

دينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{10}^2 = 10 \\ (3\sqrt{3})^2 = 27 \end{array} \right\} \text{و} \quad \text{إذن} \quad \sqrt{10}^2 \leq (3\sqrt{3})^2 \quad \text{و} \quad \text{منه فإن} \quad \sqrt{10} \leq 3\sqrt{3}$$

$$(2) - \text{لنقارن العددين} \quad -\sqrt{6} \quad \text{و} \quad -3\sqrt{2} .$$

دينا :

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{6}^2 = 6 \\ (3\sqrt{2})^2 = 18 \end{array} \right\} \text{و}$$

إذن $\sqrt{6}^2 \leq (3\sqrt{2})^2$ و منه فإن $\sqrt{6} \leq 3\sqrt{2}$. و بالتالي فإن : $-\sqrt{6} \geq -3\sqrt{2}$

II_ التآطير :

(1) - تآطير مجموع عددين :

$$\begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث :} \\ x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t \\ x + z \leq a + b \leq y + t \end{array}$$

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

لنؤطر $x + y$.

لدينا :

$$3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$$

$$\text{إذن : } -1 \leq x + y \leq 10$$

(2) - تآطير مقابل عدد حقيقي :

$$\begin{array}{l} a \text{ عدد حقيقي بحيث : } x \leq a \leq y \\ \text{سيكون لدينا : } -y \leq -a \leq -x \end{array}$$

(3) - تآطير فرق عددين :

$$\begin{array}{l} a \text{ و } b \text{ و } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ و } t \text{ أعداد حقيقية بحيث :} \\ x \leq a \leq y \text{ و } z \leq b \leq t \\ x - t \leq a - b \leq y - z \end{array}$$

* ملاحظة هامة : لتآطير $a - b$ ، نضع : $a - b = a + (-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

$$x \text{ و } y \text{ عدنان حقيقيان بحيث : } 3 \leq x \leq 8 \text{ و } -4 \leq y \leq 2$$

لنؤطر $x - y$.

لدينا :

$$3 \leq x \leq 8 \text{ و } -2 \leq -y \leq 4$$

$$3-2 \leq x + (-y) \leq 8+4 \quad \text{إذن :}$$

$$1 \leq x - y \leq 12 \quad \text{ومنه فإن :}$$

(4) - تأطير جداء عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة بحيث :

$$z \leq b \leq t \quad \text{و} \quad x \leq a \leq y$$

$$x \times z \leq a \times b \leq y \times t$$

* مثال 1 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $1 \leq y \leq 3$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$$

$$3 \leq x \times y \leq 21 \quad \text{إذن :}$$

* مثال 2 :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $-5 \leq x \leq -2$ و $3 \leq y \leq 6$

لنؤطر $x \times y$.

لدينا :

$$2 \leq -x \leq 5$$

إذن :

$$6 \leq -xy \leq 30 \quad \text{أي} \quad 2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$$

ومنه فإن : $-30 \leq xy \leq -6$.

(5) - تأطير مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x \leq a \leq y$

$$\frac{1}{y} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{x} \quad \text{سيكون لدينا :}$$

(6) - تأطير خارج عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث : $t \neq 0$ و $z \neq 0$ و $b \neq 0$

$$z \leq b \leq t \quad \text{و} \quad x \leq a \leq y$$

$$\frac{x}{t} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{y}{z} \quad \text{سيكون لدينا}$$

* ملاحظة هامة : لتأطير $\frac{a}{b}$ ، نضع : $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه .

* مثال :

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $3 \leq x \leq 7$ و $5 \leq y \leq 9$
لنؤطر $\frac{x}{y}$

لدينا :

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$$

إذن :

$$\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{أي} \quad 3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$

* تمرين تطبيقي :

a و b و c أعداد حقيقية بحيث :
 $6 \leq a \leq 8$ و $-4 \leq b \leq -2$ و $-3 \leq c \leq 5$

أطر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

الحل :

(1) - تأطير a^2 .

لدينا : $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$ و منه فإن : $36 \leq a^2 \leq 64$

(2) - تأطير b^2 .

لدينا : $(-4)^2 \leq b^2 \leq (-2)^2$ و منه فإن : $4 \leq b^2 \leq 16$

(3) - تأطير $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \leq 2b \leq -4$

و $-4 \times (-3) \leq -4c \leq -4 \times 5$ أي $12 \leq -4c \leq 20$

إذن : $6 + (-8) + 12 \leq a + 2b - 4c \leq 8 + (-4) + 20$

و منه فإن : $10 \leq a + 2b - 4c \leq 24$

(4) - تأطير $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6 + (-4) \leq a + b \leq 8 + (-2)$ أي $2 \leq a + b \leq 6$

$$\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4} \quad \text{و}$$
$$\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4} \quad \text{أي} \quad 2 \times \frac{1}{16} \leq (a+b) \times \frac{1}{b^2} \leq 6 \times \frac{1}{4} \quad \text{إذن :}$$
$$\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2} \quad \text{و بالتالي فإن :}$$