Prof : Mersani Imed

Série N°1

Produit sacalaire et vectoriel dans l'espace 4 ème Sc. Exp

A.S : 2023-2024

Exercice 1

Soit $(O,\vec{i},\vec{i},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

On donne les points $A(1,-2,-1)$, $B(1,3,1)$ et $C(5,6,5)$.

1) **a/** Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés puis calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

2) **a/** Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre OABC.

b/ En déduire la distance du point O au plan (ABC).

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{i},\vec{k})$.

On considère les points $A(-1,0,1)$, $B(1,4,-1)$, $C(3,-4,-3)$ et $D(4,0,4)$.

1) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) Montrer que ABC est un triangle rectangle en A.

3) **a/** Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

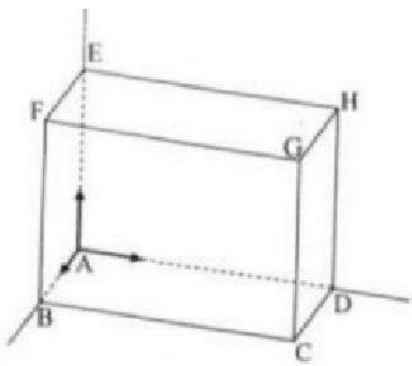
4) Calculer la distance d(O,(AB)).

5) **a/** Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ABCD.

b/ Soit H le projeté orthogonal D sur le plan (ABC).
Calculer la distance DH.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\vec{k}$.



1) **a/** Vérifier que $\overrightarrow{AG} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

b/ Déterminer les composantes du chacun des vecteurs $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{EB} \wedge \overrightarrow{EG}$.

c/ Déterminer une équation cartésienne du plan (EBG).

2) Soit α un réel différent de 1 et M le point de coordonnées $(2\alpha,4\alpha,3\alpha)$.

a/ Vérifier que $M \in (AG)$.

b/ Montrer que M n'appartient pas au plan (EBG).

3) Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre MEBG.

a/ Exprimer $\mathcal{V}$ en fonction de α.

b/ Pour quelles valeurs de α, $\mathcal{V}$ est-il égal au volume du parallélépipède ABCDEFGH ?

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points A(–3,0,0), B(0,1,1), C(–1,1,2) et D(3,1,1).

1) a/ Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ Déduire l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

c/ Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

2) a/ Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre ABCD. Montrer que $\mathcal{V} = \dfrac{1}{2}$.

b/ Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC). Calculer DH.

3) a/ Calculer la distance du point D à la droite (AC).

b/ On note H′ le projeté orthogonal de D sur la droite (AC). Montrer que le triangle DHH′ est rectangle et en déduire la distance HH′.

Exercice 5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points A(2,1,0), B(1,2,2), C(3,3,1) et D(0,m,m), où m est un réel.

1) a/ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

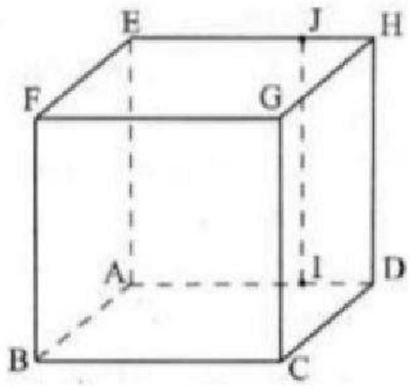
b/ En déduire l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC.

2) a/ Prouver que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

b/ Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre ABCD.
Montrer que $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}$.

Exercice 6

Dans la figure ci-contre,



✓ ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

✓ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{EJ} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AD}$.

On note $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{AE}$ et on munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1) a/ Déterminer les coordonnées des points F, G, I et J.

b/ Soit M le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \alpha\right)$, où α est un réel.

Montrer que $M \in (IJ)$.

2) **a/** Vérifier que : $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM} = -\frac{2}{2}\overrightarrow{i} - \alpha\overrightarrow{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{k}$ et que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$.

b/ En déduire que les triangles AFM et BCM ont la même aire.

3) **a/** Montrer que $(\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{AM}) \cdot \overrightarrow{AG} = -\alpha$ et que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BG} = 1$.

b/ Montrer que : (M, A, F et G sont coplanaires) si et seulement si (M et I sont confondus).

c/ Déterminer les points M de la droite (IJ) pour lesquels AFMG et BCMG sont deux tétraèdres de même volume.

Exercice 7

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}\right)$.

On considère les points $A(3,2,6)$, $B(1,2,4)$ et $C(4,-2,5)$.

1) **a/** Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

c/ Calculer la volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre OABC.

2) Soit H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
Montrer que $OH = \frac{4}{3}$.

Exercice 8

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Soient $I = G * B$, $J = G * F$ et L un point de [GC] distinct de G et C.

Construire le cube ABCDEFGH.

1) Déterminer les coordonnées A, B, C, D, E, F, G et H.

2) **a/** Montrer que : $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FE}$ puis calculer l'aire $\mathcal{A}_1$ du triangle GIJ.

b/ Montrer que : $\overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JG}$.

c/ En déduire que l'aire $\mathcal{A}_2$ du triangle LIJ ne dépend pas de la position du point L.

3) On pose $\overrightarrow{CL} = \alpha\overrightarrow{CG}$, avec $\alpha \in \left]0,1\right[$.

a/ Vérifier que $L(1,1,\alpha)$.

b/ Montrer que : $d(L,(BH)) = \sqrt{\frac{2}{3}(\alpha^2 - \alpha + 1)}$.

c/ Déterminer la position du point L pour que d(L,(BH)) soit minimale.

4) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre ALJI.