DEVOIR DE : Synthèse N° 2

EXERCICE N°1 :	10'	3 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances.

1°) f est une fonction linéaire de coefficient -2.
Montrer que $f(a-b)=f(a)-f(b)$ pour tout réels a et b.

2°) A et B sont deux points distincts.
Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$ équivaut à $M=B$.

Partie B : Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

1°) Si f une fonction linéaire telle que $f(2)\geq f(3)$ et $f(4)\leq f(5)$ alors son coefficient est strictement négatif.

2°) L'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{4x^2-4x+1}=1-2x$ est IR_+.

EXERCICE N°2 :	20'	5 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

I- Résoudre dans IR :

a) $(2x+3)(x-2)-2x^2+8x-1=0$.

b) $\dfrac{6-2x}{2}+x-4>0$.

II- On donne : $A(x)=-6x^2+(8+3\sqrt{3})x-4\sqrt{3}$.

1°) Vérifier que : $A(x)=(2x-\sqrt{3})(4-3x)$.

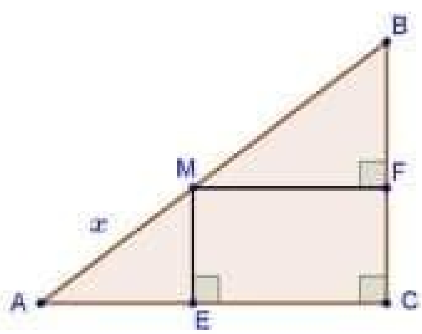
2°) Résoudre dans IR l'équation : $A(x)=0$.

3°) Résoudre dans IR l'inéquation $A(x)>0$.

4°) En utilisant le tableau de signe de $A(x)$, comparer :

a) $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A\left(\dfrac{4}{3}\right)$ **b)** $A\left(\dfrac{4}{3}\right)$ et $A(999)$.

III- On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $AC=4$ et $BC=3$.
Soit M un point de $[AB]$. On pose $AM=x$.
Soient E et F les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AC) et sur (BC).



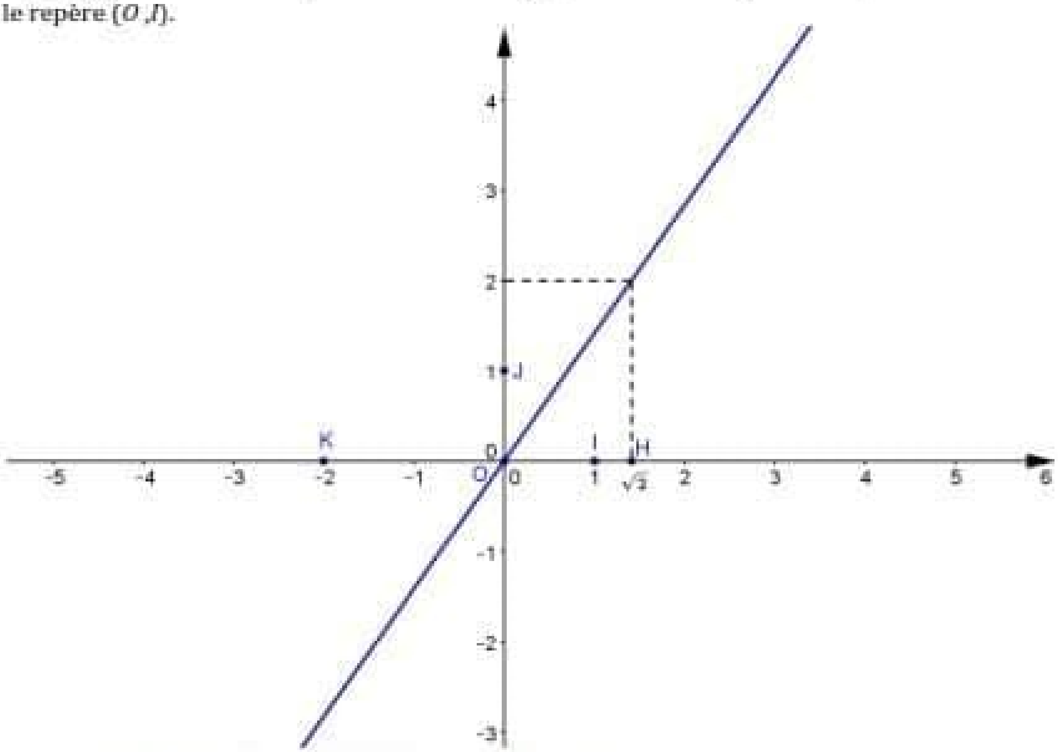
1°) Montrer que $EF=\sqrt{x^2-\dfrac{32}{5}x+16}$

2°) Déterminer l'ensemble des x pour lesquels on a $EF>AM$.

 Tél : +216 29 862 464 / +216 29 862 111 - Email : contact@takiacademy.com

EXERCICE N°3 :	25'	5 points	

Dans la figure ci-jointe, Δ_f désigne la représentation graphique d'une fonction linéaire f dans un repère (O,I,J). H et K sont les points de la droite (OI) d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ et -2.
dans le repère (O,I).



1°) Utiliser le graphique pour déterminer le coefficient de f.

2°) Soit g la fonction linéaire telle que $2g(4) = g(2) - 3\sqrt{2}$ et Δ_g la representation graphique de g dans le même repère (O,I,J).

a) Montrer que $g(x) = -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x$.

b) Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par g.

c) Déterminer l'antécédent de $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ par g.

3°) Soient $E\left(6;-3\sqrt{2}\right)$ et $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\right)$. Les points O, E et F sont-ils alignés ? Justifier.

4°) Tracer Δ_g.

5°) Soit A le point de Δ_f d'abscisse $\sqrt{2}$ et B le point de Δ_g d'ordonnée $\sqrt{2}$.

a) Placer les points A et B dans le repère (O,I,J) donné.

b) Calculer $\sin(HOA)$ ainsi que $\cos(KOB)$.

c) En déduire que les droites Δ_f et Δ_g sont perpendiculaires.

EXERCICE N°4 :	35'	7 points	

Dans la figure ci-dessous ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 6$ cm.

1°) a) Construire le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

2°) a) Construire le point E image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que C est le milieu de segment $[BE]$.

3°) Soit O le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$.

a) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OF}$.

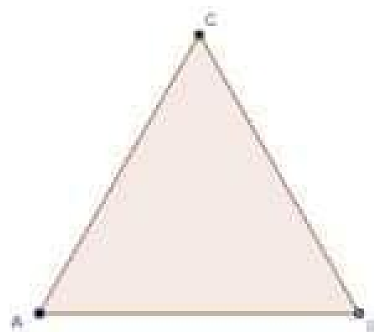
b) Montrer que $AFDO$ est un rectangle.

c) Déterminer l'image de la droite (FE) par la translation de vecteur $\overrightarrow{FA}$.

4°) Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$ recoupe (AB) en un deuxième point H.

a) Montrer que [CH] est la hauteur issue de C du triangle ABC.

b) Montrer que $\left(\frac{AO}{OF}\right)^2 + \left(\frac{OB}{BC}\right)^2 = 1$.



TakiAcademy
- www.takiacademy.com -

EXERCICE N°1 :	10'	3 points	

Partie A : Restitution organisée de connaissances.

1°) f est une fonction linéaire de coefficient -2.

Montrer que $f(a-b)=f(a)-f(b)$ pour tout réels a et b.

$$f(x) = -2x$$

$$f(a-b) = -2(a-b) = -2a+2b$$
$$= -2a-(-2b)$$
$$= \boxed{f(a)-f(b)}$$

2°) A et B sont deux points distincts.

Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}$ équivaut à $M=B$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BM}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{B = M}$$

Partie B : Répondre par vrai ou faux et justifier la réponse.

1°) Si f une fonction linéaire telle que $f(2)\geq f(3)$ et $f(4)\leq f(5)$ alors son coefficient est strictement négatif.

FAU

soit a le coefficient de f.

si $f(2) \geq f(3)$ sig $2a \geq 3a$ sig $\boxed{a \leq 0}$

si $f(4) \leq f(5)$ sig $4a \leq 5a$ sig $\boxed{a \geq 0}$

donc $f(2) \geq f(3)$ et $f(4) \leq f(4)$ alors $a \leq 0$ et $a \geq 0$

Ainsi $\boxed{a = 0}$

2°) L'ensemble des solutions de l'équation $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 - 2x$ est IR_+. FAU

$$\sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x-1)^2} = 1 - 2x \Leftrightarrow |2x - 1| = 1 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

Donc $\boxed{S_{IR} =]-\infty, \frac{1}{2}]}$

EXERCICE N°2 : | 20' | 5 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

I- Résoudre dans IR :

a) $(2x+3)(x-2)-2x^2+8x-1=0$.

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+3x-6-2x^2+8x-1=0$

$\Leftrightarrow 7x-7=0 \Leftrightarrow x=1 \Leftrightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}}=\{1\}}$

b) $\dfrac{6-2x}{2}+x-4>0$.

$\Leftrightarrow 3-x+x-4>0 \Leftrightarrow 0x>1 \Leftrightarrow \boxed{S_{\mathbb{R}}=\emptyset}$

II- On donne : $A(x)=-6x^2+(8+3\sqrt{3})x-4\sqrt{3}$.

1°) Vérifier que : $A(x)=(2x-\sqrt{3})(4-3x)$.

$$\begin{aligned}(2x-\sqrt{3})(4-3x) &= 8x-6x^2-4\sqrt{3}+3\sqrt{3}x\\ &= -6x^2+(8+3\sqrt{3})x-4\sqrt{3}\\ &= A(x)\end{aligned}$$

2°) Résoudre dans IR l'équation : $A(x)=0$.

$A(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\sqrt{3}=0$ ou $4-3x=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x=\dfrac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \,;\, \frac{4}{3} \right\}}$$

3°) Résoudre dans IR l'inéquation $A(x) > 0$.

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$2x-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-\sqrt{3})(4-3x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left]-\infty, \frac{\sqrt{3}}{2}\right[\cup \left]\frac{4}{3} ; +\infty\right[}$$

4°) En utilisant le tableau de signe de $A(x)$, comparer :

a) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $A\left(\frac{4}{3}\right)$ **b)** $A\left(\frac{4}{3}\right)$ et $A(999)$.

$\boxed{A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = A\left(\frac{4}{3}\right)} = 0$ et $A\left(\frac{4}{3}\right) = 0$ et $A(999) > 0$

donc $\boxed{A\left(\frac{4}{3}\right) < A(999)}$

III- On considère un triangle ABC rectangle en C tel que $AC = 4$ et $BC = 3$.

Soit M un point de $[AB]$. On pose $AM = x$.

Soient E et F les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AC) et sur (BC).

1°) Montrer que $EF = \sqrt{x^2 - \frac{32}{5}x + 16}$

on a : $EF = \sqrt{ME^2 + MF^2}$

et puisque $(ME) \parallel (BC)$ et $\{A\} = (BM) \cap (CE)$ alors d'après

le théorème de Thales on a : $\frac{ME}{3} = \frac{x}{AB}$

or $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = \boxed{5}$

donc $\boxed{ME = \frac{3x}{5}}$

de même on trouve $MF = \frac{4}{5}(5 - x) = \boxed{4 - \frac{4}{5}x}$

alors $EF = \sqrt{\left(\frac{3}{5}x\right)^2 + \left(4 - \frac{4}{5}x\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25}x^2 + 16 - \frac{32x}{5} + \frac{16}{25}x^2}$

$= \sqrt{x^2 - \frac{32x}{5} + 16}$

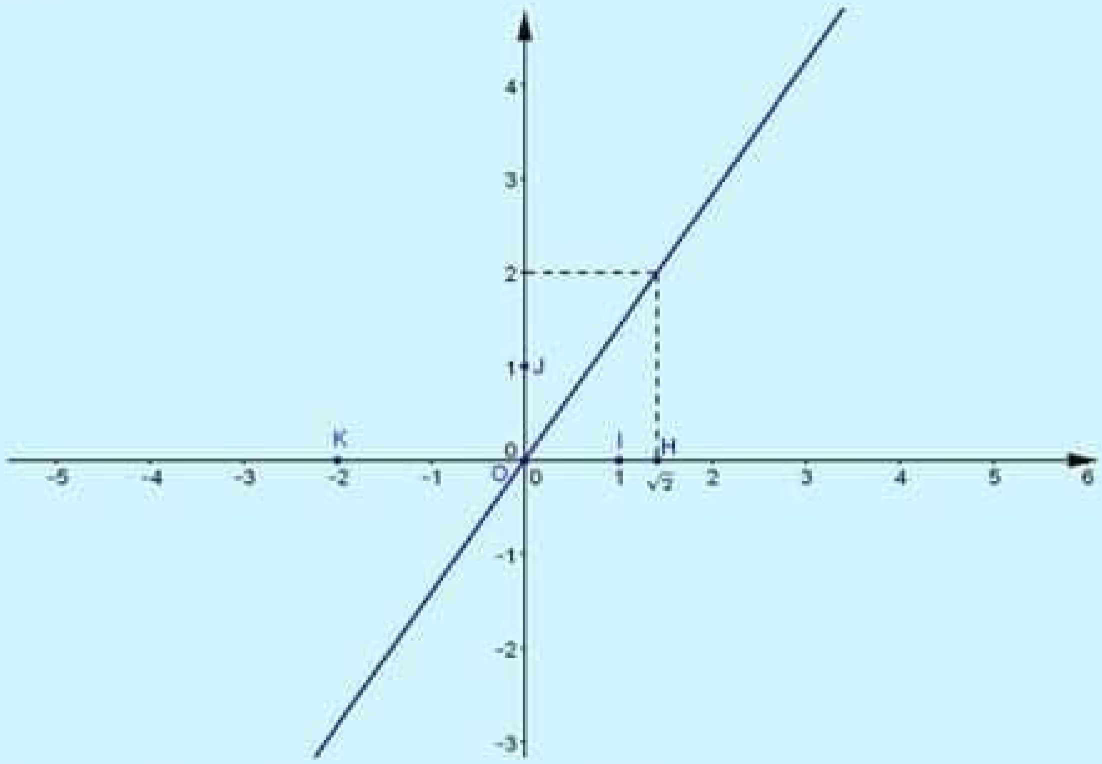
2°) Déterminer l'ensemble des x pour lesquels on a $EF > AM$.

$EF > AM \Leftrightarrow x^2 - \frac{32}{5}x + 16 > x^2$ et $0 \leq x \leq 5$

$\Leftrightarrow x < \frac{5}{2}$ et $0 \leq x \leq 5$ Donc $\boxed{x \in \left[0, \frac{5}{2}\right[}$

EXERCICE N°3 :	25'	5 points	

Dans la figure ci-jointe, Δ_f désigne la représentation graphique d'une fonction linéaire f dans un repère (O,I,J) . H et K sont les points de la droite (OI) d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ et -2. dans le repère (O,I).



1°) Utiliser le graphique pour déterminer le coefficient de f.

on a : $f(\boxed{\sqrt{2}}) = 2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}} \times \boxed{\sqrt{2}}$

donc le coefficient de f est $\boxed{\sqrt{2}}$

2°) Soit g la fonction linéaire telle que $2g(4)=g(2)-3\sqrt{2}$ et Δ_g la representation graphique de g dans le même repère (O,I,J).

a) Montrer que $g(x)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x$.

on a : $g(4)=g(2\times 2)=2g(2)$

donc $2g(4)=g(2)-3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2\times 2g(2)=g(2)-3\sqrt{2} \Leftrightarrow 4g(2)=g(2)-3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 3g(2)=-3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow g(2)=-\sqrt{2}$

$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times 2$

donc $\boxed{g(x)=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x}$

b) Calculer l'image de $\sqrt{2}$ par g.

$g(\sqrt{2})=-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=\boxed{-1}$

c) Déterminer l'antécédent de $\frac{1}{\sqrt{6}}$ par g.

$g(x) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x$

$\frac{1}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ sig $x = \frac{1}{\sqrt{6}} \times \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{3}} = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

3°) Soient $E\left(6;-3\sqrt{2}\right)$ et $F\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}};-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\right)$. Les points O, E et F sont-ils alignés ? Justifier.

$g(6) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times 6 = \boxed{-3\sqrt{2}}$ donc $\boxed{E \in \Delta_g}$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$

$= \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}$

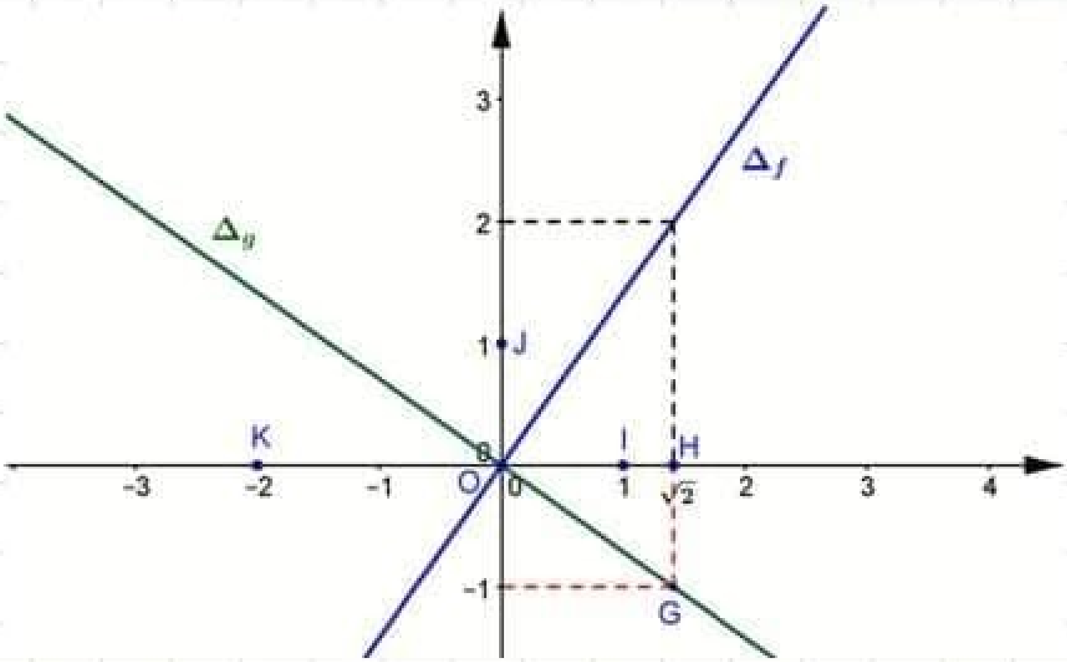
donc $\boxed{F \in \Delta_g}$

donc les points O, E et F sont alignés

4°) Tracer Δ_g.

on sait que $g(\sqrt{2}) = -1$ or $\boxed{\sqrt{2} = OH}$

on pose $G(\sqrt{2};-1) \in \Delta_g$. Ainsi $\boxed{\Delta_g = (OG)}$

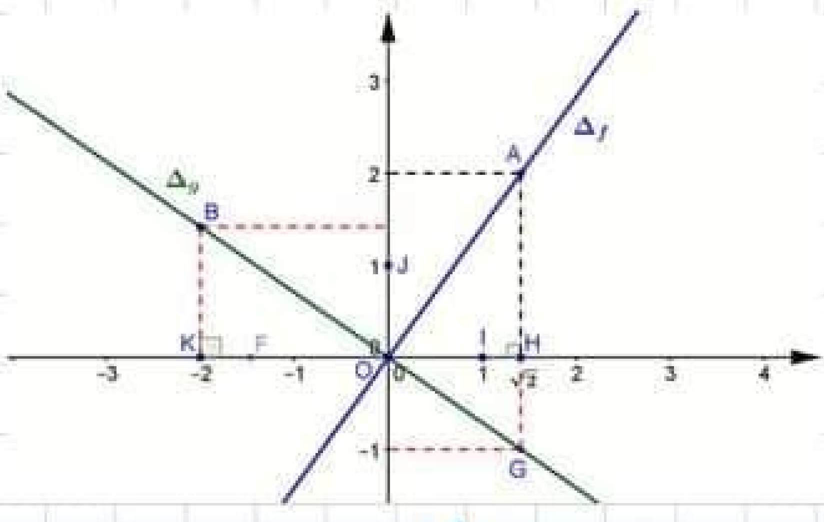


5°) Soit A le point de Δ_f d'abscisse $\sqrt{2}$ et B le point de Δ_g d'ordonnée $\sqrt{2}$.

a) Placer les points A et B dans le repère (O,I,J) donné.

$A \in \Delta_f$ d'abscisse $\sqrt{2}$ et $f(\sqrt{2}) = 2$ donc $\boxed{A(\sqrt{2}\,;2)}$

$B \in \Delta_g$ d'adonnée $\sqrt{2}$ et $g(-2) = \sqrt{2}$ donc $B(-2,\sqrt{2})$



b) Calculer $\sin(H\hat{O}A)$ ainsi que $\cos(K\hat{O}B)$.

$$\sin(H\hat{O}A) = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{\sqrt{OH^2+AH^2}} = \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{2+4}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

$$\cos(K\hat{O}B) = \frac{OK}{OB} = \frac{OK}{\sqrt{OK^2+KB^2}} = \frac{2}{\sqrt{2^2+\sqrt{2}^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{6}}{3}}$$

c) En déduire que les droites Δ_f et Δ_g sont perpendiculaires.

on a : $\cos(K\hat{O}B) = \sin(H\hat{O}A)$

donc $\boxed{K\hat{O}B + H\hat{O}A = 90°}$

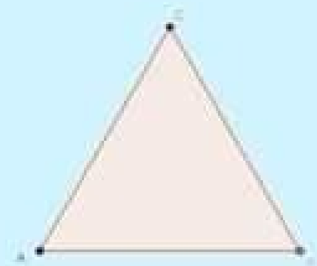
or $\boxed{B\hat{O}A = 180° - (K\hat{O}B + H\hat{O}A) = 180° - 90° = 90°}$

donc $\boxed{\Delta_f \perp \Delta_g}$

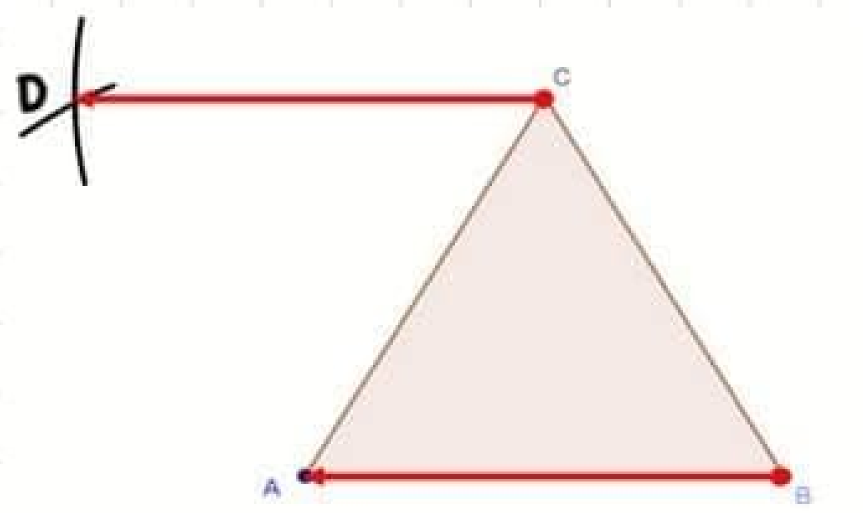
EXERCICE N°4 :	35'	7 points	

Dans la figure ci-dessous ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 6$ cm.

1°) a) Construire le point D image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$.



$t_{\overrightarrow{BA}}(C) = D$ sig $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}}$



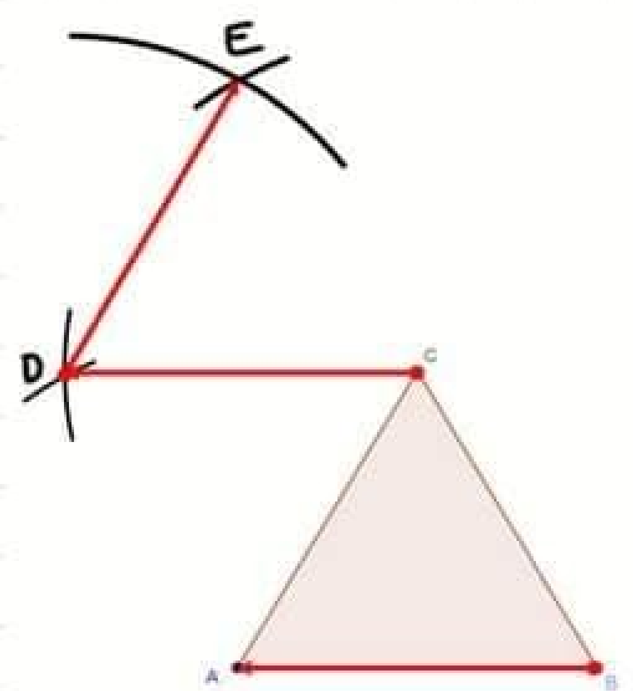
TakiAcademy
- www.takiacademy.com -

b) Montrer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

on a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ sig $\boxed{\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}}$

2°) a) Construire le point E image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$t_{\overrightarrow{AC}}(D) = E$ sig $\boxed{\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}}$



b) Montrer que C est le milieu de segment $[BE]$.

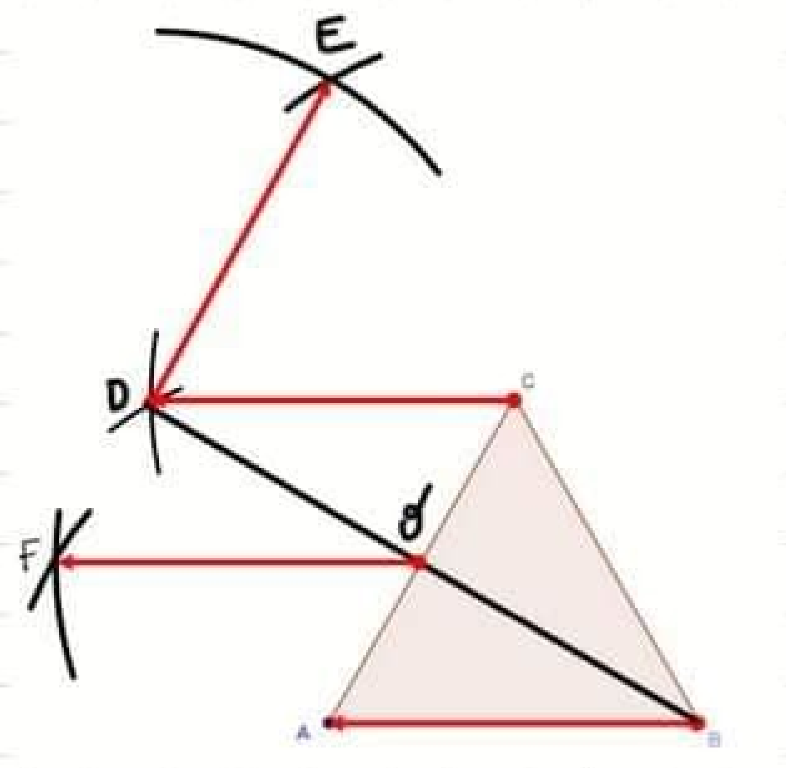
on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ sig $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$

or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CE}$

sig $\boxed{C = B * E}$

3°) Soit O le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$.

a) Construire le point F tel que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OF}$.



b) Montrer que *AFDO* est un rectangle.

on a : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OF}$ sig $\boxed{\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AF}}$ or $O = D * B$ sig $\boxed{\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}}$

donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OD}$, donc $\boxed{\text{AFDO est un parallélogramme}}$ (1)

• ABC est un triangle équilatéral et $O = A * C$

donc $A\hat{O}B = 90°$ or $D \in (OB)$ donc $\boxed{A\hat{O}D = 90°}$ (2)

(1) et (2) donnent AFDO est un rectangle.

c) Déterminer l'image de la droite (*FE*) par la translation de vecteur $\overrightarrow{FA}$.

on a : AFDO est un parallélograme sig $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{DO}$

sig $t_{\overrightarrow{FA}}(D) = O$

et $t_{\overrightarrow{FA}}(F) = A$

donc $t_{\overrightarrow{FA}}\big((DF)\big) = (AO)$

et on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DE}$ alors $\boxed{(AC) // (DE)}$ (1')

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FD}$ (AFDO est un parallélogramme)

donc $(OC) // (FD)$ or $O \in (AC)$

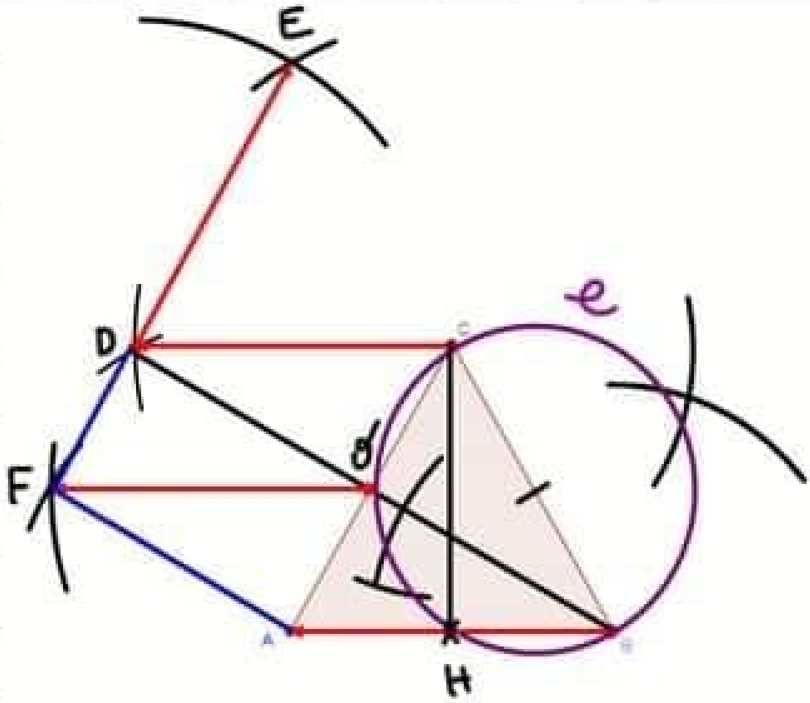
donc $\boxed{(AC) // (FD)}$ (2')

(1') et (2') donnent $(DE) // (FD)$ donc $E \in (FD)$

Ainsi $\boxed{t_{\overrightarrow{FA}}((FE)) = (AO)}$

4°) Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$ recoupe (AB) en un deuxième point H.

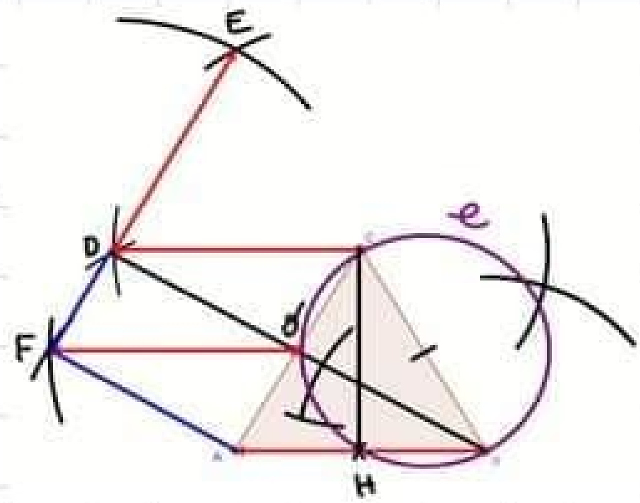
a) Montrer que [CH] est la hauteur issue de C du triangle ABC.



$H \in \mathscr{C}_{[BC]}$ privé de B et C donc $\widehat{AHB} = 90°$. Ainsi $[CH]$ est la hauteur issue de C du triangle ABC

b) Montrer que $\left(\frac{AO}{OF}\right)^2+\left(\frac{OB}{BC}\right)^2=1$.

on a : $O = A * C$ et ABC un triangle équilatéral donc AOB et OBC sont deux triangles rectangles en O.



et on a : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OF}$ alors $BA = OF$

donc $\frac{AO}{OF} = \frac{AO}{AB} = \cos(O\hat{A}B)$
$= \cos(60°)$
$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

et $\frac{OB}{BC} = \sin(O\hat{C}B) = \sin 60° = \boxed{\frac{1}{2}}$

Ainsi $\left(\frac{AO}{OF}\right)^2 + \left(\frac{OB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \boxed{1}$