3ème Maths

ROTATIONS

Math Φull Mark
abdelhedi.majed@yahoo.fr

DEFINITION : ROTATION DU PLAN

Soit I un point donné et $\theta \in$ IR. L'application R du plan est dite rotation de centre I et d'angle θ si et seulement si : $R(I) = I$ et pour tout point $M \neq I$:

$R(M) = M'$ signifie $\begin{cases} IM' = IM \\ \left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ On note $R = R_{(I,\theta)}$.

Exemple :

Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et R la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer R(A) R(B) et R(D).

b) Soit $R' = R_{\left(A, \frac{\pi}{4}\right)}$. Construire C' image de C par R'. Montrer que A, D et C' sont alignés et exprimer $\overrightarrow{AC'}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$

Cas Particuliers

- Si $\theta=2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) Alors R est l'identité du plan : R(M)=M $\forall$ $M\in P$. On note $R= Id_P$
- Si $\theta=\pi+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) Alors $R=S_I$.(symétrie centrale de centre I).
- Si $\theta \in \left]0, \pi\right[$ alors R est une rotation directe.
- Si $\theta \in \left]-\pi, 0\right[$ alors R est une rotation indirecte.

Exercice : Soit ABC un triangle équilatéral direct et O son centre de gravité.

1°/ Soit $R = R_{\left(O, \frac{2\pi}{3}\right)}$ Vérifier que R(A)=B

2°/ Soit R' une rotation de centre I d'angle $\frac{2\pi}{3}$ tel que R'(A)=B . Montrer R'=R

Conclure.

THEOREME

Math Φull Mark
abdelhedi.majed@yahoo.fr

Soient A et B deux points distincts et $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) .

Il existe une seule rotation R d'angle θ qui transforme A en B.

Soit I le centre de cette rotation :

- ★ Si $\theta=\pi+2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) alors I est le milieu de [AB] .
- ★ Si $\theta \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) , alors I est l'intersection de la médiatrice de [AB] avec Γ :

$$\Gamma = \left\{ M \in P \ / \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}} \right) \equiv \theta \left[2\pi \right] \right\}.$$

Propriété1 : Point fixe

La rotation d'angle $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) admet un seul point invariant c'est le centre.

Propriété2 : Rotation Inverse

Pour tous points M, N du plan : $R_{(I,\theta)}(M) = N$ Signifie $R_{(I,-\theta)}(N) = M$

$R_{(I,-\theta)}$ est dit rotation inverse de R notée R^{-1}.

La rotation d'angle $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) admet un seul point invariant c'est le centre.

Propriété 3 :

Toute rotation R conserve le produit scalaire :

Si R(A)=A' , R(B)= B', R(C)=C' et R(D)=D' alors $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

Propriété 4 et Définition :

Si R(A)=A' et R(B)=B' Alors A'B'=AB : Toute rotation est une isométrie du plan .

Définition :Isométrie

Soit f une application du plan . f est dite une isométrie du plan si et seulement si

$\forall$ M , N *deux points du plan on a : M'N'=MN où M'=f(M) et N'=f(N)*

S_O , S_Δ et $t_{\vec{u}}$ *sont des isométries .*

L'homothétie de rapport k≠1 et k ≠-1 n'est pas une isométrie.

Propriétés : Conservation de grandeurs géométriques:

Math Φull Mark
abdelhedi.majed@yahoo.fr

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit R une rotation de centre O et d'angle θ .

On désigne par A' , B' , C' et D' les images respectives des points A ,B ,C et D. x∈IR.

1°/ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$

2°/ $\overrightarrow{AB} = x.\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = x.\overrightarrow{C'D'}$

3°/ $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right]$

4°/ $\left(\widehat{\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right)\left[2\pi\right]$.

Propriété caractéristique d'une rotation :

Soit un réel $\theta \neq k.2\pi$.

1°/ Soit R une rotation d'angle θ : *si* $\left.\begin{matrix} R(A) = A' \\ R(B) = B' \end{matrix}\right\}$ *alors* $\begin{cases} AB = A'B' \\ \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right] \end{cases}$

2° / Si $\left.\begin{matrix} A \neq B \\ \overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'} \\ AB = A'B' \end{matrix}\right\}$ *Alors il existe une seule rotation R tels que :* $\begin{cases} R(A) = A' \\ R(B) = B' \end{cases}$

et de plus R : • d'angle $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}\right)\left[2\pi\right]$

• de centre le point d'intersection des médiatrices de [AA'] et [BB'].

Conséquences :

1°/ Toute rotation conserve : l'alignement , le barycentre , le milieu, le parallélisme , l'orthogonalité et le contact.

Conséquences :

2°/ R : rotation d'angle θ. $\Delta = \left(A, \vec{u}\right)$

a) Si R(A)= A' et $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right]$, alors R(Δ)=Δ' où $\Delta' = \left(A', \vec{v}\right)$

b) Si $\left.\begin{array}{l} R(A) = A' \\ \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta\left[2\pi\right] \\ AB = A'B' \end{array}\right\} Alors\ \ R\left(B\right) = B'$

Remarque :

L'image d'un cerle **C** de centre I par R est un cercle de même rayon et de centre R(I)

Composée de deux rotations de même centre :

Soit $R_1 = R_{(I,\theta_1)}$ et $R_2 = R_{(I,\theta_2)}$

Définition :

On appelle composée de R_2 par R_1 notée $R_1 \circ R_2$ l'application du plan qui à tout point M on associe le point M'' de la manière suivante :

$R_2\left(M\right) = M'$ et $R_1\left(M'\right) = M''$ alors : $R_1 \circ R_2\left(M\right) = M''$ ou bien encore :

$R_1 \circ R_2\left(M\right) = R_1\left(R_2\left(M\right)\right) = R_1\left(M'\right) = M''$

Théorème :

$$R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1 = R_{(I,\theta_1+\theta_2)}$$