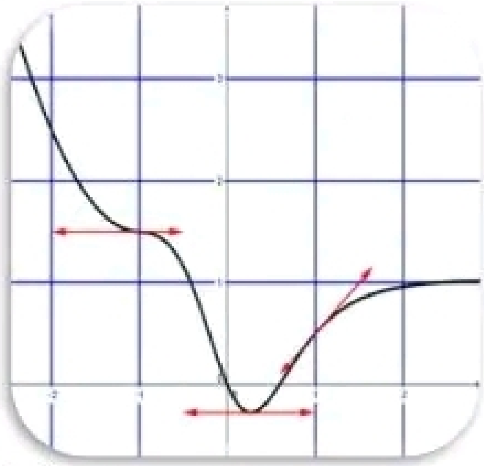
-DEVOIR DE SYNTHESE N°1-

EXERCICE N°1 — 3 POINTS

Pour chacune des propositions suivantes une seule réponse est exacte indiquez la

« **Aucune justification n'est demandée** »

1) Dans la figure ci-contre on donne la courbe de la dérivée f' d'une fonction f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ alors sa courbe admet sur l'intervalle $[-2,2]$.



a) Deux points d'inflexions.

b) Un seul point d'inflexion.

c) Trois points d'inflexions.

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, si $x\neq 0$ et $f(0)=0$ alors :

a) f est continue et non dérivable en 0.

b) f est dérivable en 0

c) f n'est pas continue en 0.

3) L'ensemble des points M d'affixe z tel que $\left|\frac{\bar{z}}{2}+1-i\right|=1$ est le cercle

a) De centre A d'affixe $-1+i$ et de rayon 1

b) De centre B d'affixe $-2(1+i)$ et de rayon 2

c) De centre C d'affixe $-1-i$ et de rayon 2

4) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^4=\bar{z}$ alors.

a) L'équation (E) admet 4 solutions distincts .

b) Les solutions non nulles de (E) sont les racines 5-ièmes de l'unité

c) Les solutions non nulles de (E) sont les racines 3-ièmes de l'unité

EXERCICE N°2 — 5 POINTS

Dans la feuille annexe **figure 1**, on donne la courbe C_f représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. On donne les informations suivantes :

- L'axe des ordonnées est une branche parabolique à C_f au voisinage de $-\infty$

- La droite $\Delta : y = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.
- Pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f(1) = \frac{\pi}{4}$

1) En s'inspirant du graphe et des informations précédentes.

a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f \circ f(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x^2 - x}$, $f'_g(-4)$ et $\lim\limits_{x \to -4^+} \frac{x^2 - 16}{f(x) - 2}$

d) Donner une approximation affine de $f(-4.9)$.

2) Montrer que la courbe de la fonction h définie sur $[-4,0]$ par $h(x) = (x+2)(f(x)-1)$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse $\lambda \in]-2,-1[$

3) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Justifier que g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et déterminer $g'(x)$.

b) En déduire que $g(x) = \frac{\pi}{2}$

EXERCICE N°3 6 POINTS

1) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : 4z^2 - 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)z - 6 + 3i\sqrt{3} = 0$.

a) Vérifier que $\left(5 - i\sqrt{3}\right)^2 = 22 - 10i\sqrt{3}$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2) Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E_\theta) : z^2 - e^{i\theta}z - 1 - e^{-i\theta} + i\cos\theta.\sin\theta = 0$.

a) Montrer que l'équation (E_θ) admet une solution réelle que l'on déterminera.

b) Résoudre alors l'équation (E_θ)

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A ,B et M d'affixes respectives $z_A = 1 + \cos\theta$, $z_B = -1 + i\sin\theta$ et $z_M = e^{i\theta}$.

Dans **la figure 2** de l'annexe on a placé le point **M**

a) Construire les points A et B .

b) Déterminer l'ensemble des points B lorsque θ varie.

c) Montrer que le quadrilatère OAMB est un parallélogramme.

4) Déterminer z_A lorsque OAMB est un losange.

EXERCICE N°4 6POINTS

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2+1}}$.

On note (ξ) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur IR et que pour tout $x \in IR$ on a : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}^{\,3}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que pour tout $x \in IR$: $|f'(x)| \leq 1$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α.

c) Montrer que $|\alpha| \leq |2+\alpha|$

3) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 2$.

5) Soit g la fonction définie sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \dfrac{1}{f(tgx - 2)}$.

a) Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$ pour tout x de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et calculer $(g^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.