| | | | |
|---|---|---|---|
| Mathématiques | Devoir de synthèse N°1 | | |
| Lycée T.H. Regeub | | | |
| Date : 02 - 12 - 2021 | 2 h | 3ème Maths | Mr. Abidi .Ridha |

## Exercice N°1 ( 7points )

I ) Soit la fonction $g$ définie par $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

1 ) a) Déterminer l'ensemble de définition de $g$

b ) Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

c ) Montrer que $\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ on a : $g(x) = \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{x+1}$

2 ) Montrer g est prolongeable par continuité en 1 et définir son prolongement $G$

II ) Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x-4}{x^2+x-2} & \text{si } x > 1 \\ \frac{2+\sqrt{x^2+3}}{x+1} & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

On désigne par $\zeta$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1 ) a ) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ ; b ) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

c ) Montrer que $x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$ en déduire $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

d ) Montrer que $f$ est continue en $1$ ; e ) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R} - \{-1\}$

2 ) a ) Vérifier que si $x \in ]1 ; +\infty[$ on a : $f(x) = x - 1 + \frac{6}{x+2}$

en déduire que la droite $D : y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\zeta$ au voisinage de $+\infty$

b) Etudier la position relative de $\zeta$ et de la droite $D$ sur $]1 ; +\infty[$

c ) Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat

3 ) Montrer que $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -1$ . Interpréter graphiquement le résultat

## Exercice N°2 (7points)

1 ) Simplifier les expressions :

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right).\sin(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$b = \cos(-15\pi + x) + \cos\left(\frac{25\pi}{2}-x\right) - \sin\left(-\frac{17\pi}{2}-x\right) + \sin(x+11\pi)$$

2 ) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$ .On considère les points

$A(\sqrt{3}\,;\,-1)$ , $I(-2\,;\,2)$ et le carré direct $OABC$

1 ) a ) Déterminer les coordonnées polaires de $A$ puis construire ce point

b ) Montrer que les coordonnées polaires de $B$ sont $\left(2\sqrt{2}\,;\,\frac{\pi}{12}\right)$

2 ) a) Déterminer les coordonnées polaires de $C$

b ) Vérifier que $B(\sqrt{3}+1, -1+\sqrt{3})$

c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3 ) a ) Calculer $\cos(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}})$

en déduire la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}})$

b ) (AC) coupe la bissectrice de $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI}})$ en $D$ . Démontrer que $OBD$ est équilatéral

## Exercice N°3 (4points)

On a représenté dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\zeta$ d'une fonction $f$, la droite $\Delta$ est une asymptote oblique à $\zeta$ en $+\infty$, les droites $\Delta'$ et $\Delta''$ sont des asymptotes verticales à $\zeta$ et $D$ est une asymptote horizontale à $\zeta$ en $-\infty$

Par lecture graphique : 1 ) Déterminer l'ensemble de définition de $f$

2 ) a) déterminer : $\lim\limits_{-\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$ ;
$\lim\limits_{+\infty} (f(x) - x + 2)$ ; $\lim\limits_{-1^+} \frac{1}{f(x)-2}$

b ) Peut - on prolonger la fonction $f$ par continuité en 2 ? Justifier.

2 ) Soit la fonction g définie sur [ 1 , +∞ [ - { 2 } par $g(x) = \frac{1}{f(x) - x + 2}$

a ) Calculer $\lim\limits_{+\infty} g(x)$

b ) Montrer que g est prolongeable par continuité en 2

3 ) Soit la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{f(x)}$

a ) Déterminer l'ensemble de définition de h

b ) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} h(x) - \sqrt{x} = 0$

## Exercice N°4 ( 2 points )

Mettre une croix devant la réponse exacte

1 ) Si $\vec{u}\binom{-\sqrt{3}}{1}$ et $\vec{v}\binom{1}{1}$ alors $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ est égale à :

a ) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b ) $\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c ) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2 ) $\lim\limits_{1^+} \frac{x^3-1}{\sqrt{x}-1} + E(x)$ est égale à :

a ) 7 b ) 5 c ) 6

3 ) $\sin \frac{185\pi}{6}$ est égale à :

a ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b ) $\frac{1}{2}$ c ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 ) $\lim\limits_{+\infty} x - 1 - \sqrt{x^2 - 2x}$ est égale à :

a ) $+\infty$ b ) $-\infty$ c ) 0

Bon travail