LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8

M.LAKHDAR

# DEVOIR DE CONTRÔLE2

EPREUVE : MATHEMATIQUES 1S3-7

Durée : 1h | Date : 19 / 11/ 2021

## EXERCICE 1 5 pts

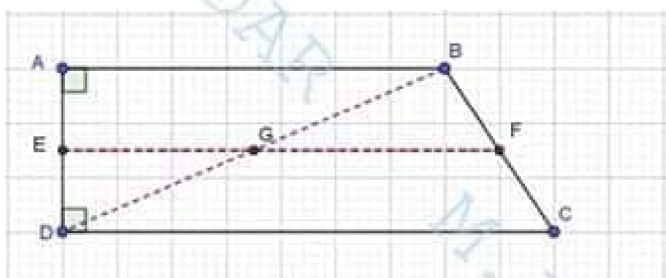
Les questions sont indépendantes

**1.** Comparer **A** et **B** sachant que :

$A = 2021(1+2+3+\dots\dots+2022)$ et $B = 2022(1+2+3+\dots\dots+2021)$

**2.** ABCD un trapèze tels que $(AB)\perp(AD)$ et $(DC)\perp(AD)$ . **E** et **F** les milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[BC]$ et soit **G** le point d'intersection des droite $(EF)$ et $(BD)$ .

Montrer que : $2EF = AB + DC$




**3.** Donner la bonne réponse : $x$ et $y$ deux réels tels que $-2 < x < -1$ et $y \in ]2,4[$ alors :

a. $|y-x| = x-y$ ou b. $|y+x| = -x-y$ ou c. $||y|-|x|| = y+x$

( avec justification )

**4.** Calculer le produit suivant : $P = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\dots\dots\left(1-\frac{1}{625}\right)$

## EXERCICE 2 8 pts

**1.** Pour tout réel x , on considère l'expression : $A(x) = x^2+3x-4$ .

a. Calculer $A(x)$ pour $x=-4$ .

b. Vérifier que : $A(x)-(x-1)^2 = 5(x-1)$ .

**c.** En déduire une factorisation de : $A(x)$.

**2.** Soit l'expression $B(x) = x^3 - 27 - 13(x-3)$.

**a.** Factoriser $B(x)$.

**b.** Vérifier que pour tout réel $x$ on a : $B(x) + (3-x)A(x) = 0$.

**3.** Soit $I$ l'ensemble des réels x tel que : $2 < 5 - 3x < 5$ .

**a.** Montrer que $I = ]0,1[$.

**b.** Montrer que pour tout réel $x \in I$ on a : $B(x) > 0$ et que $\dfrac{A(x)}{B(x)} \in \left]-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right[$ .

**c.** En déduire une comparaison de deux réels : $\left(1-10^{-9}\right)^3$ et $27+13\left(-10^{-9}-2\right)$

## EXERCICE 3 **7 pts**

Dans la figure ci-dessous, $[OA]$ un segment de longueur 7cm et **C** le cercle de centre O et de rayon 3cm qui coupe $[OA]$ au point I ,et M et N deux points du cercle **C** non diamétralement opposés et distincts de I . la parallèle a $(OM)$ passant par I coupe $(AM)$ en P , et la parallèle à $(ON)$ passant par I coupe $(AN)$ en **Q** .

**1.a.** Comparer les rapports : $\dfrac{AP}{AM}$ et $\dfrac{AQ}{AN}$ puis $\dfrac{IP}{OM}$ et $\dfrac{IQ}{ON}$

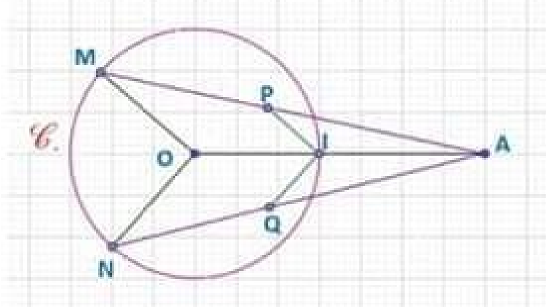
**b.** Déduire que $(MN)$ et $(PQ)$ sont parallèles et que $IP = IQ$ .

**2.** La parallèle à $(MN)$ passant par I coupe respectivement $(MP)$ et $(NQ)$ en $K$ et $L$.

On donne les longueurs des segments suivants : $PK = a$ ,$QL = b$ ,$MK = x$ ,$NL = y$

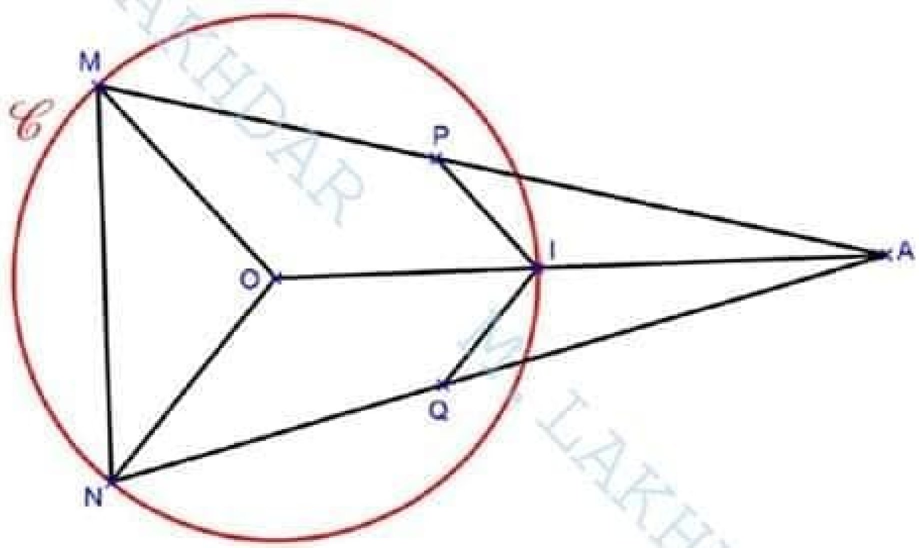
**a.** Montrer que les réels a, b ,x et y , vérifie la relation : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{y}$.

**b.** Calculer : $\dfrac{x^2 - xy}{y^2 + xy}$ si $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{3}$



## ANNEXE

NOM PRENOM.................................. CLASSE.........



M.LAKHDAR

# CORRECTION DEVOIR DE CONTRÔLE2

LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8
M.LAKHDAR

## EXERCICE 1 5 pts

**1)** $A = 2021(1+2+3+\dots+2022)$

$= 2021(1+2+3+\dots+2021) + 2021\times 2022$

$B = 2022(1+2+\dots+2021) = 2021(1+2+3+\dots+2021) + (1+2+\dots+2021)$

$A - B = 2021(1+2+\dots+2021) + 2021\times 2022 - 2021(1+2+\dots+2021) - (1+2+\dots+2021)$

$= 2021\times 2022 - (1+2+\dots+2021) = (\underbrace{2022+\dots+2022}_{2021\text{-termes}}) - (\underbrace{1+\dots+2021}_{2021\text{-termes}}) > 0$

d'où $\boxed{A > B}$

**2)** ds le triangle DBC

on a : $\begin{cases} (FG) \parallel (DC) \\ F = B * C \\ (FG) \cap (BD) = \{G\} \end{cases} \Rightarrow \boxed{G = B * D}$

et par suite $\boxed{DC = 2GF}$ (1)

de m̂ ds le triangle DAB on a $\begin{cases} G = D * B \\ E = D * A \end{cases} \Rightarrow \boxed{2EG = AB}$ (2)

d'autre part $G \in [EF]$ donc $EF = EG + GF$

$\Leftrightarrow 2EF = 2EG + 2GF = AB + DC$

conclusion : $\boxed{AB + DC = 2EF}$

**3)** $-2 < x < -1 \Rightarrow 1 < |x| < 2$

$y \in ]2,4[ \Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow 2 < |y| < 4$ $\Big\}$ $|y| > |x|$

$\Rightarrow \big||y| - |x|\big| = |y| - |x| = \boxed{y + x}$

**4)** $P = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\dots\dots\left(1-\frac{1}{625}\right)$

$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\dots\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1+\frac{1}{25}\right)$

$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\dots\left(1-\frac{1}{25}\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\dots\left(1+\frac{1}{25}\right)\right]$

$= \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{\cancel{24}}{25} \times \frac{\cancel{3}}{2} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{3}} \times \frac{5}{\cancel{4}} \times \dots \times \frac{26}{\cancel{25}}$

$\boxed{P = \frac{13}{25}}$

EXERCICE 2 **8 pts**

LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 6
M.LAKHDAR

1) $A(x) = x^2 + 3x - 4$

a) $x = -4 \Rightarrow A(-4) = (-4)^2 + 3(-4) - 4 = 16 - 16 = 0$

$A(-4) = 0$

b) $A(x) - (x-1)^2 = x^2 + 3x - 4 - (x-1)^2$

$= x^2 - 2x + 1 + 5x - 5 - (x-1)^2$

$= (x-1)^2 - (x-1)^2 + 5(x-1)$

d'où : $\boxed{A(x) - (x-1)^2 = 5(x-1)}$

c) $A(x) - (x-1)^2 = 5(x-1) \Leftrightarrow A(x) = (x-1)^2 + 5(x-1)$

$\Leftrightarrow A(x) = (x-1)(x-1+5)$

$\Leftrightarrow \boxed{A(x) = (x-1)(x+4)}$

2) $B(x) = x^3 - 27 - 13(x-3)$

a) $B(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 9) - 13(x-3)$

$= (x-3)(x^2 + 3x + 9 - 13) = (x-3)(x^2 + 3x - 4)$

or $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ d'où

$\boxed{B(x) = (x-3)(x-1)(x+4)}$

b) D'après a) $B(x) = (x-3)(x^2 + 3x - 4) = (x-3)A(x)$

$\Leftrightarrow B(x) - (x-3)A(x) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{B(x) + (3-x)A(x) = 0}$

3) a) $\boxed{x \in I} \Leftrightarrow 2 < 5 - 3x < 5$

$\Leftrightarrow -3 < -3x < 0$

$\Leftrightarrow 0 < x < 1$ d'où $\boxed{I = ]0, 1[}$

b)

$$B(x) = \underbrace{(x-3)}_{<0}\underbrace{(x-1)}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{>0} \qquad \begin{cases} x \in ]0,1[ \\ x-3 \in ]-3,-2[ \\ x-1 \in ]-1,0[ \\ x+4 \in ]4,5[ \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{B(x) > 0 \ , \ \forall x \in I}$

*) d'après 2) b) on a :

$B(x) = (x-3)\, A(x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ pour $B(x) \neq 0$ (car $B(x) > 0$)

or $0 < x < 1 \Leftrightarrow -3 < x-3 < -2$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \dfrac{1}{x-3} < -\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \dfrac{A(x)}{B(x)} < -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{A(x)}{B(x)} \in ]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}[}$

c) D'après (b), $\boxed{B(x) > 0}$ $\forall x \in ]0,1[$

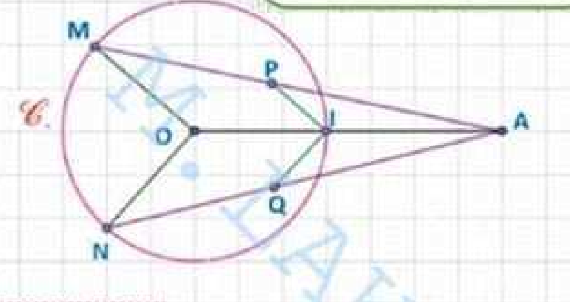
en particulier pour $x = 1 - 10^{-9}$ $\in$ on C

$B(1-10^{-9}) > 0 \Rightarrow (1-10^{-9})^3 - 27 - 13(1-10^{-9}-3) > 0$

$\Leftrightarrow \boxed{(1-10^{-9})^3 > 27 + 13(-10^{-9} - 2)}$

LYCEE PILOTE BAYREM 5
EL MENZAH 8
M.LAKHDAR

## EXERCICE 3 **7 pts**




Dans la figure ci-contre, $[OA]$ un segment de longueur 7cm et $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 3cm qui coupe $[OA]$ au point $I$, et $M$ et $N$ deux points du cercle $\mathscr{C}$ non diamétralement opposés et distincts de I. La parallèle à $(OM)$ passant par $I$ coupe $(AM)$ en $P$, et la parallèle à $(ON)$ passant par $I$ coupe $(AN)$ en $Q$.

**1°) a)** Comparer les rapports :

$$\frac{AP}{AM} \text{ et } \frac{AQ}{AN} \quad \text{puis} \quad \frac{IP}{OM} \text{ et } \frac{IQ}{ON}.$$

$\{A\} = (MP) \cap (OI)$
$(PI) \parallel (MO)$
donc d'aprés le Théorème de Thalès

on a : $\boxed{\frac{AP}{AM} = \boxed{\frac{AI}{AO}} = \frac{IP}{OM}}$

$\{A\} = (OI) \cap (NQ)$
$(IQ) \parallel (ON)$
donc d'aprés le Théorème de Thalès

on a : $\boxed{\frac{AQ}{AN} = \boxed{\frac{AI}{AO}} = \frac{IQ}{ON}}$

(1) et (2) donnent $\boxed{\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}}$ et $\boxed{\frac{IP}{OM} = \frac{IQ}{ON}}$

**b)** Déduire que $(MN)$ et $(PQ)$ sont parallèles et $IP = IQ$.

A, P et M et A, Q et N sont alignés dans le même ordre
et $\boxed{\frac{AP}{AM} = \frac{AQ}{AN}}$ donc d'aprés la réciproque de Thalès

on a : $\boxed{(MN) \parallel (PQ)}$

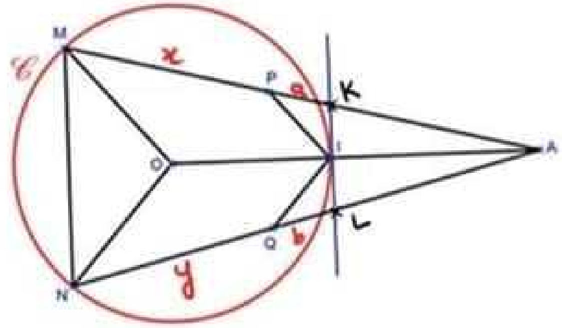
on a : $\frac{IP}{OM} = \frac{IQ}{ON}$ et $OM = ON$ (rayons du cercle)

donc $\boxed{IP = IQ}$

**2°)** La parallèle à $(MN)$ passant par $I$ coupe respectivement $(MP)$ et $(NQ)$ en K et L.

On donne les longueurs des segments suivants : $PK = a$ , $QL = b$ , $MK = x$ et $NL = y$ .

**a)** Montrer que les réels : $a, b$, $x$ et $y$ , vérifie la relation : $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ .




$K \in (MP)$ et $L \in (NQ)$
$(MN) // (PQ) // (KL)$

alors d'après le Théorème de Thalès

on a $\boxed{\frac{PK}{PM} = \frac{QL}{QN}}$

sig $\frac{PK}{QL} = \frac{PM}{QN}$

sig $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{x}{y}}$

**b)** Calculer : $\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy}$ si $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$.

on a $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ sig $\boxed{y = 3x}$

donc $\frac{x^2 - xy}{y^2 + xy} = \frac{x^2 - x \times 3x}{(3x)^2 + x \times 3x} = \frac{x^2 - 3x^2}{9x^2 + 3x^2} = \frac{-2\cancel{x^2}}{12\cancel{x^2}}$

$= \boxed{-\frac{1}{6}}$