Exercice 1

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - U_n + 2}{U_n + 1} \end{cases}$.

1 On admet que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_n \leqslant 1 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} U_n$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

- **a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \leqslant S_n \leqslant n + \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$.
- **b** Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} - 1$.

1 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

2 Étudier la monotonie de la suite (U_n).
En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3
- **a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}(U_n - 1)$.
- **b** En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - 1 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

- **a** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n < S_n \leqslant n + 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
- **b** Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

1 Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2
- **a** Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
- **b** Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geqslant \sqrt{n}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 1

1 $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leqslant U_n \leqslant 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + 0 = 1$ (car $\frac{1}{3} \in]-1,1[$)

donc $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est convergente et } \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$.

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_k \leqslant 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^k$

donc $\sum\limits_{k=1}^{n} 1 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} U_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k$ d'où $n \leqslant S_n \leqslant n + \frac{1}{3} \cdot \frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}$

ainsi $\boxed{n \leqslant S_n \leqslant n + \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$.

b $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geqslant n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{2n}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2n}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 1$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 1}$.

Exercice 2

1
- Pour $n = 0$: $U_0 = 2 > 1$ (vrai)
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $U_n > 1$ et on montre que $U_{n+1} > 1$.
  On a : $U_{n+1} - 1 = U_n + \frac{1}{U_n} - 2 = \frac{U_n^2 - 2U_n + 1}{U_n} = \frac{(U_n - 1)^2}{U_n} > 0$ (car $U_n > 1$)
  donc $U_{n+1} > 1$.

Conclsuion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 1}$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{U_n} - 1 = \frac{1 - U_n}{U_n} < 0$ (car $U_n > 1$) donc $U_{n+1} < U_n$ ce qui implique que $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est décroissante}}$.

La suite (U_n) est décroissante et minorée par 1 donc (U_n) est convergente.

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$, où f est la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$.
- La suite (U_n) est convergente vers un réel $a \in [1, +\infty[$ (car $U_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$)
- La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et $a \in [1, +\infty[$ donc f est continue en a.

Il en résulte que : $f(a) = a$.

$$\begin{cases} f(a) = a \\ a \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a + \frac{1}{a} - 1 = a \\ a \geqslant 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 \\ a \geqslant 1 \end{cases} \iff a = 1$$

Conclsuion : $\boxed{\text{La suite } (U_n) \text{ est convergente et } \lim_{n\to+\infty} U_n = 1}$.

3 ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $U_{n+1} - 1 = \frac{(U_n-1)^2}{U_n} = \frac{U_n-1}{U_n}(U_n-1)$.

Comparons : $\frac{U_n-1}{U_n}$ et $\frac{1}{2}$.

$\frac{U_n-1}{U_n} - \frac{1}{2} = \frac{2U_n-2-U_n}{2U_n} = \frac{U_n-2}{2U_n}$

La suite (U_n) est décroissante donc $U_n \leqslant U_0 = 2$ d'où $U_n - 2 \leqslant 0$ et comme $2U_n > 0$ (car $U_n > 1$) alors $\frac{U_n-2}{2U_n} \leqslant 0$ ainsi $\frac{U_n-1}{U_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

Or : $U_n - 1 > 0$ d'où $\frac{U_n-1}{U_n}(U_n-1) \leqslant \frac{1}{2}(U_n-1)$.

On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n-1)}$.

ⓑ
- Pour $n = 0$: $U_0 - 1 = 1$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ donc $U_0 - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$ (vrai)
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et on montre que $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

  On a : $U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ donc $\frac{1}{2}(U_n-1) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

  Or : $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n-1)$ d'où : $U_{n+1} - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_n \leqslant 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + 0 = 1$ (car $\frac{1}{2} \in]-1,1[$)

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 1}$.

4 ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant U_k \leqslant 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc $\sum_{k=1}^{n} 1 \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$

d'où $n \leqslant S_n \leqslant n + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}$.

Il en résulte que : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ n \leqslant S_n \leqslant n + 1 - \frac{1}{2^n}}$.

ⓑ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geqslant n$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant \frac{S_n}{n} \leqslant 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 1}$.

Exercice 3

1 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} \geqslant U_n$

d'où $\boxed{\text{la suite } (U_n) \text{ est croissante}}$.

2 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a : $1 \leqslant k \leqslant n$ donc $1 \leqslant \sqrt{k} \leqslant \sqrt{n}$ d'où $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$

d'où : $U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}(n-1+1)$ ainsi $U_n \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{n}}$.

Il en résulte que : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ U_n \geqslant \sqrt{n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geqslant \sqrt{n}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$.