

EXERCICE 1 (3 POINTS)

A) Répondre par vrai ou faux (sans justification)

- 1) Si 2 et - 3 sont des racines d'un polynôme $P(x)$ alors $P(x)$ est factorisable par $x^2 + x - 6$.
- 2) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.
- 3) Si 10 est un zéro de deux polynômes P et Q , alors $P(x) - Q(x)$ est factorisable par : $(x - 10)$.
- 4) Si un polynôme admet exactement deux racines réelles distinctes alors il est de degré 2
- 5) Soit P le polynôme défini par $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 18x + 8$.

Si P admet trois racines réelles α, β et γ alors $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = -4$

B) 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $x^2 - 4x + 1 = 0$.

2) Résoudre dans \mathbb{R}^2 le système $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 + xy = 15 \end{cases}$

EXERCICE 2 (3 POINTS)

On donne ci-contre le tableau de signe d'un trinôme de second degré $P(x) = ax^2 + bx + c$

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$P(x)$	-	○	+	○	-

- 1) En utilisant ce tableau, Donner, en justifiant, le signe de chacun des réels a , b et c .
- 2) a) Factoriser $Q(x) = ax^2 + bx + c$
 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $Q(x) > 0$
 c) Sachant que $Q(3) = -80$, déterminer les réels a , b et c

EXERCICE 3 (6 POINTS)

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = (x + 1)x^3 - (m + 4)x^2 - 13x - 2m$. où m est un réel.

- 1) Quel est le degré de P ?
- 2) Déterminer m pour que -1 soit un zéro de $P(x)$.
- 3) Dans cette question on prend **$m = 3$**
 - a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 - x - 6 = 0$
 - b) Montrer que P est factorisable par : $x^2 - x - 6$.
 - c) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation : $P(x) = 0$.
 - d) Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation : $P(x) \geq 0$.
- 4) Soit le polyôme Q défini par : $Q(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$.
 - a) Factoriser $Q(x)$ et vérifier que $Q(x+1) = (x+1)^2(x+2)^2$
 - b) Montrer que pour tout réel x , $Q(x+1) - Q(x) = 4(x+1)^3$.
 - c) Dédurre la somme $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + 30^3$

EXERCICE 4 (4.5 POINTS)

Soit ABCD un parallélogramme. On désigne par I le milieu du segment [DC] et par G le point d'intersection des droites (BD) et (AI).

- 1) Faire une figure claire.
- 2) Montrer que G est le barycentre des points pondérés (D, 2) et (B, 1).
- 3) a) Construire le point E définie par $4\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DC}$. Que représente le point E pour les points C et D ?
b) Construire le point F barycentre des points pondérés (B, 4) et (C, -1).
c) Montrer que les droites (DF) et (EB) sont parallèles.
- 4) On désigne par K le barycentre des points pondérés (B, 1), (C, -2) et (D, 2).
Montrer que $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA}$ puis construire K.
- 5) Soit H le barycentre des points pondérés (B,4) et (D,3).
a) Montrer que H est le barycentre des points pondérés (E,4) et (F,3).
b) En déduire une construction simple de H.

EXERCICE 5 (3.5 POINTS)

Soit OAB un triangle équilatéral de côté 3. On désigne par (\mathcal{C}) le cercle de centre O passant par A .

Soit C le point diamétralement opposé à B sur le cercle (\mathcal{C})

- 1) a) Construire les points $D = t_{\overrightarrow{OA}}(A)$ et $E = t_{\overrightarrow{OA}}(B)$
b) Montrer que OBED est un trapèze isocèle
- 2) Soit l'application $f : P \rightarrow P ; M \mapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}$
Montrer que f est la translation de vecteur \overrightarrow{OD}
- 3) Construire $\mathcal{C}' = t_{\overrightarrow{OD}}(\mathcal{C})$ et montrer que $E \in \mathcal{C}'$
- 4) La droite (BE) recoupe le cercle (\mathcal{C}') en F. Montrer que $t_{\overrightarrow{OD}}(B) = F$.
- 5) La droite (FD) recoupe le cercle (\mathcal{C}') en G.
a) Déterminer $t_{\overrightarrow{OD}}(\overrightarrow{OB})$.
b) En déduire que $t_{\overrightarrow{OD}}(C) = G$