Prof : Douma Ali 2022/2023

Série N°5 (4ème Sciences)

Fonction réciproques

Exercice N° 1

I) Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$.

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe (φ) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) a) Montrer que la fonction f est une bijection de $]2,+\infty[$ sur lui même .

b) Calculer $fof(x)$ pour tout $x\in]2,+\infty[$. Que peut -on dire de f^{-1}

II) Soit la fonction g définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f\left(\dfrac{2}{sin\ x}\right)$ pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $g(0)=2$.

1) Montrer que g est continue en 0.En déduire que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; $g(x)=\dfrac{2}{cos\ x}$.

2) a) Étudier les variations de g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. En déduire que g réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

b) Déterminer K le domaine de dérivabilité de g^{-1} et calculer $\left(g^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x\in K$

Exercice N°2

1) Soit la fonction u définie sur $\left]1,\sqrt{2}\right[$ par : $u(x)=\dfrac{x^2}{2-x^2}$.
Étudier les variations de u sur $\left]1,\sqrt{2}\right[$. En déduire l'image de $\left]1,\sqrt{2}\right[$ par u.

2) Soit la fonction f définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{cos(\pi\ x)}$.

a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $[1,+\infty[$. Calculer $g(2)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x\in]1,+\infty[$

3) pour tout $x\in\left[1,\sqrt{2}\right[$, on pose $h(x)=2g(x)-gou(x)$. Montrer que h est dérivable sur $\left]\sqrt{2}\right[$ et calculer $h\,'(x)$. En déduire que $h(x)=0$ pour tout $x\in\left[1,\sqrt{2}\right[$.

4) Soit f_n la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right[$ par : $f_n(x)=f(x)+x^n-2$.

a) Étudier les variations de f_n .En déduire qu'il existe un unique réel α_n tel que $f_n(\alpha_n)=0$.

b) Montrer que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{1}{2}\right[$; $f_{n+1}<f_n(x)$. En déduire que la suite (α_n)est croissante et quelle converge vers une limite que l'on déterminera .

Exercice N°3

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 1 - \sqrt{cos\ x}$.

1. Étudier les variations de f .En déduire que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.
2. On note f^{-1} la fonction réciproque de f.f^{-1} est elle dérivable à droite en 0 ? à gauche en 1.
3. Déterminer D le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice N°4

Soit la fonction f définie sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - sin(\pi x)}$.

1. Etudier les variations de f .En déduire que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .Calculer $f^{-1}(2)$.
2. Déterminer D le domaine de dérivabilité de f^{-1} et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour tout $x \in D$.

Exercice N°5

Soit la fonction f définie sur $[0, 2[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$ pour tout $x \in]0, 2[$ et $f(0) = 0$.

1. a. Montrer que f est continue en 0.
   b. Étudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat obtenu .
   c. Montrer que f est dérivable sur $]0, 2[$ et que $f'(x) = \dfrac{x}{(\sqrt{2x - x^2})^3}$ pour tout $x \in]0, 2[$.
   d. Dresser le tableau de variation de f.
2. a. Montrer que f réalise une bijection de $[0, 2[$ sur $[0, +\infty($.
   b. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$; $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2}{1 + x^2}$.
   c. Tracer sur le même repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ les courbes respectives φ et φ' des deux fonctions f et f^{-1}
3. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f^{-1}(tan\ x)$
   a. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$; $g(x) = 1 - cos(2x)$.
   b. Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, 2[$.
   c. Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
   d. la fonction g^{-1} est elle dérivable à droite en 0.
   e. Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$ et que pour tout $x \in]0, 2[$: $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2x - x^2}}$