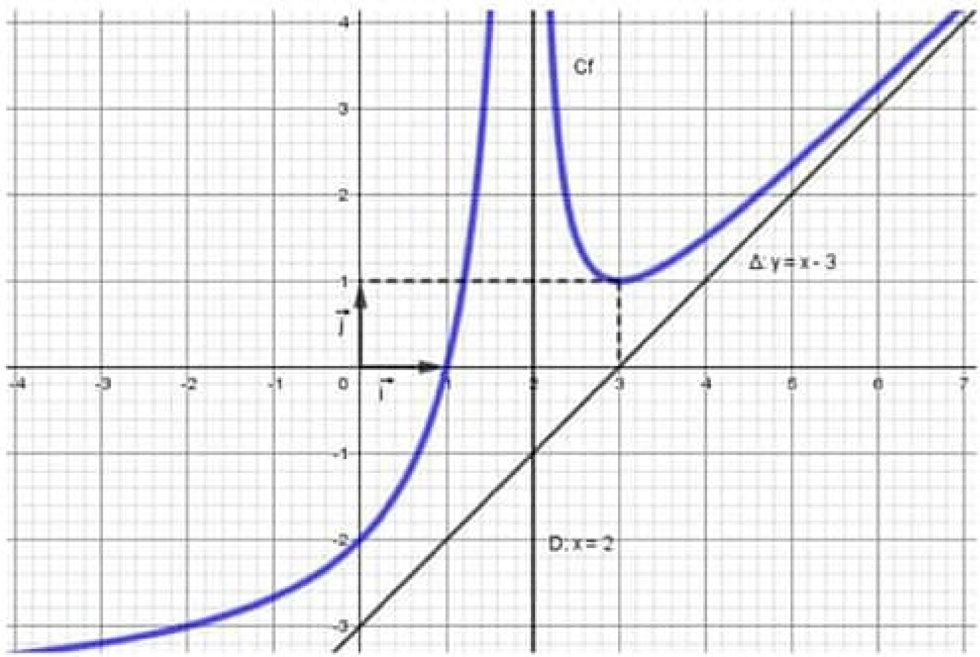
Mathématiques	Devoir commun
2022-2023	**Lycée Assed Iben Elfourat**
Devoir de contrôle 1	Classe : 4ème Sc-Tech1+2+3 Durée : 2h

Exercice1	25'	4.5 points	★ ★ ☆ ☆ ☆

On a représenté ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

On sait que :

- La droite $\Delta : y = x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équations $x = 2$ est une asymptote verticale à C_f.
- C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$



1) Par lecture graphique déterminer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{f(x)-x+3}$

2) Déterminer : $f(]2,+\infty[)$
3) Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution que l'on précisera
4) Soit g la fonction définie sur IR* par $g(x) = \frac{x-1}{x}$
   b) Déterminer l'ensemble de définition de $g \circ f$
   c) Montrer que la fonction $g \circ f$ est prolongeable par continuité en 2.
   d) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f$ et interpréter graphiquement le résultat.
   e) Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} g \circ f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

Exercice2	25'	6 points	★ ★ ★ ☆ ☆

Soit la fonction définie sur $]-\infty,1]$ par IR par : $f(x)=\begin{cases}\frac{x-\cos x}{x-1} & si\ x<0\\ \frac{1}{x+1}-\sqrt{x} & si\ x\geq 0\end{cases}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1) Montrer que f est continue en 0.
2) a) Vérifier que pour tout $x\in]-\infty,0[$ on a : $\frac{x+1}{x-1}\leq f(x)\leq 1$
   b) En déduire que la droite $\Delta: y=1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$.
3) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
4) a) Montrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
   b) Montrer que $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]0,1[$
5) On donne dans la **figure 1** de l'annexe les courbes représentatives les fonctions $u\longmapsto\sqrt{x}$ et $v: x\longmapsto\frac{1}{x+1}$ sur $]0,+\infty[$.
   a) Identifier la courbe de chacune des fonctions u et v.
   b) Placer dans le repère le point $A(\alpha,0)$.

Exercice3	30'	6.5 points	★ ★ ★ ☆ ☆

I) On pose $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1+i$.
1) Mettre sous forme algebrique $z_1.z_2$.
2) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle puis la forme trigonométrique du nombre complexe $z_1.z_2$.
3) En déduire $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.
4) Montrer que $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{4}$.

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthnormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. On donne les points A ; B ; M et M' d'affixes respectives 1 ; $i\sqrt{2}$; z et $z'=\frac{z-i\sqrt{2}}{z-1}$ pour tout $z\neq 1$.
1) a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $|z'|=1$.
   b) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que $\arg(z')\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
2) a) Montrer que pour tout $z\neq 1$; $|z'-1||z-1|=\sqrt{3}$.
   b) Déduire que si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$ alors M' appartient à un cercle que l'on déterminera.
3) Soit le point D d'affixe $z_D=e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0,\pi[$.
   a) vérifier que $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$
   b) Déduire AD en fonction de θ.
   c) Déterminer la ou les valeurs de θ pour que le triangle ABD soit isocèle en A.

Exercice 4	10'	3 points	★ ★ ☆ ☆ ☆

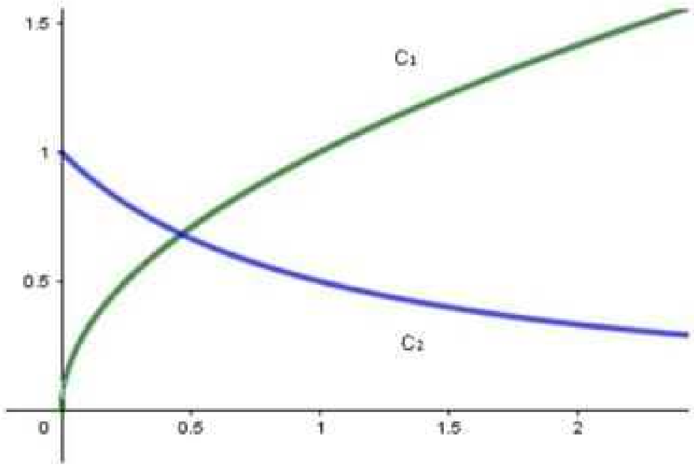
Dans chaque question indiquer la boonne réponse

1) Soit $Z=-3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$, un arguume de Z est :
   a) $-3\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$; b) $\pi+\arg(1+i\sqrt{3})-\arg(i)$ c) $-\frac{3\arg(1+i\sqrt{3})}{\arg(i)}$.
2) La forme exponentielle du nombre complexe $-\sqrt{3}-i$ est : a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ c) $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
3) Soit f unee fonction continue eet strictement croissante sur $[-1,3]$ vérifiant $f(-1)=-2$ et $f(3)=-1$ alorrs l'équation $f(x)=0$ admet dans $]-1,3[$:
   a) Deux solutions ; a)une seule solution c) aucune solution

Annexe

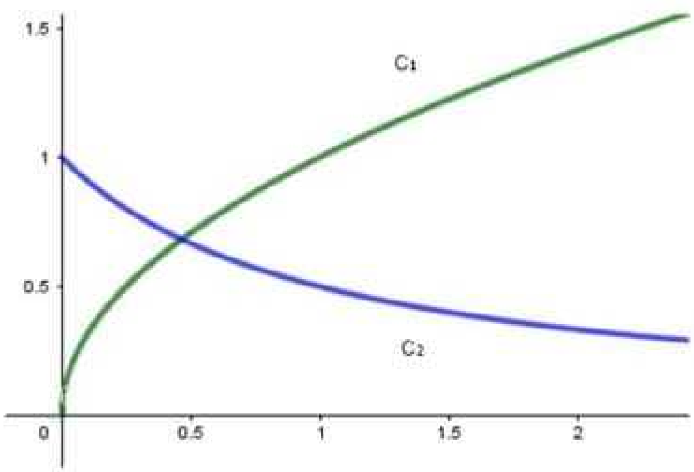
Nom et prénom : …………………………………………………………………… **Groupe** ……………………………

Figure 1



Nom et prénom : …………………………………………………………………… **Groupe** ……………………………

Figure 1



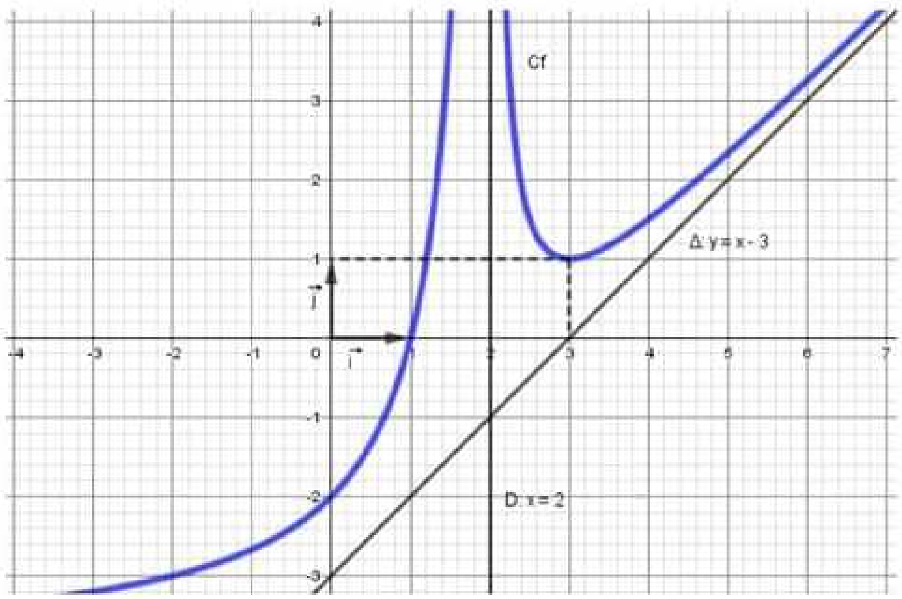
Mathématiques ***2022-2023*** **Devoir de contrôle 1**	*Profs:* ***Lycée Assed Iben Elfourat*** Classe: 4ème Sc-Tech 1-2-3 Durée : 2h

Exercice1 25' 4.5 points ★ ★ ☆ ☆ ☆

On a représenté ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

On sait que :

- La droite $\Delta : y = x - 3$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- La droite d'équations $x = 2$ est une asymptote verticale à C_f.
- C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $-\infty$



1) Par lecture graphique déterminer

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = -3$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{f(x)-x+3} = +\infty$ (1.25)

2) $: f(]2,+\infty[) = [1,+\infty[$ (0.5)

3) On a 'une part pour tout $x > 2$ $f(x) \geq 1$et d'autre part pour tout $x \in]-\infty;2[$ f est continue et strictement croissante et sa courbe coupe l'axe des abscisses en un seul point de coordonnées (1,0) donc l'équation $f(x) = 0$ admet 1 comme solution unique sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (0.75)

4) Soit g la fonction définie sur IR* par $g(x) = \frac{x-1}{x}$

b) Déterminons l'ensemble de définition de $g \circ f$: On a : f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et g est définie sur IR* et f($\mathbb{R}\setminus\{2\}$)=IR et puisque f(1)=0 ∉ IR* d'où $g \circ f$ est définie sur IR\{1,2} (0.75)

c) On a : $\lim\limits_{x\to 2} g \circ f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ donc la fonction $g \circ f$ est prolongeable par continuité en 2 et son prolongement la fonction $\begin{cases} g \circ f(x) & si\ x \neq 2 \\ 1 & si\ x = 2 \end{cases}$ (0.25)

d) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g\ o\ f = \lim\limits_{x \to +\infty} g\ (x) = 1$ donc la courbe de $g\ o\ f$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$. (0.5)

e) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1^-} g\ o\ f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim\limits_{x \to 0^-} 1 - \frac{1}{x} = +\infty$ donc la courbe de $g\ o\ f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$ (0.5)

Exercice2	25'	6 points	★ ★ ★ ☆ ☆

Soit la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-\cos x}{x-1} & si\ x < 0 \\ \frac{1}{x+1} - \sqrt{x}\ si\ x \geq 0 \end{cases}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

1) On a d'une part $f(0) = 1$ et d'autre part $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-\cos x}{x-1} = 1 = f(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{1}{x+1} - \sqrt{x}\right) = 1 = f(0)$ donc f est continue à gauche et à droite en 0 et par suite f est continue en 0. (0.75)

2) a) Vérifions que pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$. On a d'une part : pour tout $x \in]-\infty, 0[$ $-1 \leq \cos x \leq 1$ alors $-1 \leq -\cos x \leq 1$ alors $x - 1 \leq x - \cos x \leq x + 1$ et d'autre part pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on $x - 1 < -1 < 0$ alors $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-\cos x}{x-1} \leq \frac{x-1}{x-1} = 1$ et par suite pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ (0.75)

b) pour tout $x \in]-\infty, 0[$ on a : $\frac{x+1}{x-1} \leq f(x) \leq 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ d'où la droite $\Delta: y = 1$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $-\infty$. (0.75)

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \sqrt{x}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. Alors la courbe de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$ (0.75)

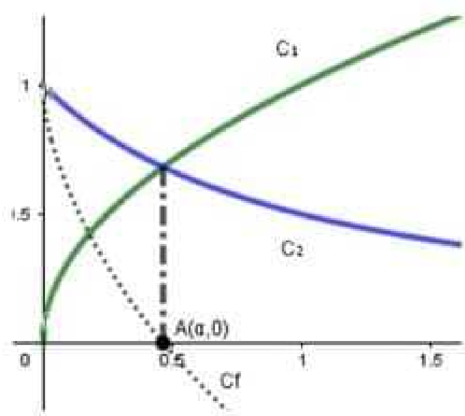
4) a) on a f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0\ \forall\ x \in]0, +\infty[$ alors f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. (0.75)

b) On a : f est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ en particulier sur $]0,1[$ et $f(0) \times \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right) = -\infty < 0$ alors $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0,1[$ (0.75)

5) On donne dans la **figure 1** de l'annexe les courbes représentatives les fonctions $u \longmapsto \sqrt{x}$ et $v: x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$.

a) $C_1: y = u(x)$ et $C_2: y = v(x)$. (0.75)

b) On a : $f(\alpha) = 0$ alors $\frac{1}{\alpha+1} - \sqrt{\alpha} = 0$ alors $v(\alpha) - u(\alpha) = 0$ alors $v(\alpha) = u(\alpha)$ et par suite le point $A(\alpha, 0)$ est la projection orthogonale du point d'intersection de deux courbes C_1 et C_2 sur l'axe des abscisses (0.75)



Exercice3	30'	6.5 points	★ ★ ★ ☆ ☆

I) On pose $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 + i$.

1) $z_1.z_2 = (1 + i\sqrt{3})(1 + i) = 1 + i + i\sqrt{3} - \sqrt{3} = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$. (0.5)

2) On a : $|z_1| = 2$ et $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$ donc e $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

et de même $|z_2| = \sqrt{2}$ et $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\arg z_2 = \frac{\pi}{4}$ donc $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et par

suite $z_1.z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ (0.75)

3) On a : $z_1.z_2 = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3})$ et $z_1.z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$ alors e

$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. (0.75)

4) $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = -\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{4}$. (0.5)

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A ; B ; M et M' d'affixes respectives 1 ; $i\sqrt{2}$; z et $z' = \frac{z-i\sqrt{2}}{z-1}$ pour tout $z \neq 1$.

1) a) Pour tout $z \neq 1$ on a : $|z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-i\sqrt{2}}{z-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z-i\sqrt{2}|}{|z-1|} = 1 \Leftrightarrow |z - i\sqrt{2}| = |z - 1| \Leftrightarrow BM = AM$ donc l'ensemble des points M(z) tel que $|z'| = 1$ est la médiatrice du segment [AB]. (0.5)

b) $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-i\sqrt{2}}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM}$ alors l'ensemble des points M(z) tel que $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ est le cercle de duamètre [AB] privé du point A (0.5)

2) a) Pour tout $z \neq 1$; $|z' - 1||z - 1| = \left|\frac{z-i\sqrt{2}}{z-1} - 1\right||z - 1| = \left|\frac{z-i\sqrt{2}-z+1}{z-1}\right||z - 1| = \frac{|1-i\sqrt{2}|}{|z-1|}|z - 1| = |1 - i\sqrt{2}| = \sqrt{3}$. (0.5)

b) si M appartient au cercle de centre A et de rayon $\sqrt{3}$ alors $|z - 1|$ =AM=$\sqrt{3}$ alors $|z' - 1| \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$ alors $|z' - 1| = 1$ alors BM'=1 et par suuite M' appartient au cercle de centre B et de rayon 1. (0.75)

3) Soit le point D d'affixe $z_D = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

a) $e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{\theta}{2}}\frac{\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-\frac{\theta}{2}}\right)}{2i} = 2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$ (0.5)

b) AD=$|z_D - 1| = |e^{i\theta} - 1| = \left|2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}\right| = |2i|\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\left|e^{\frac{i\theta}{2}}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ car $\theta \in]0, \pi[$ donc $\frac{\theta}{2} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. (0.5)

c) Si le triangle ABD soit isocèle en A alors AD=AB alors $2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = |1 - i\sqrt{2}|$ alors $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\frac{\theta}{2} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ou $\frac{\theta}{2} \equiv \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)[2\pi]$ alors$\theta \equiv \frac{2\pi}{3}[4\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}[4\pi]$or $\theta \in]0, \pi[$ alors$\theta = \frac{2\pi}{3}$ (0.75)

Exercice 4	10'	3 points	★ ★ ☆ ☆ ☆

1) Soit $Z = -3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$, un arguume de Z est :

a) $-3\arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i}\right)$; (1) $\boxed{\text{b) } \pi + \arg(1 + i\sqrt{3}) - \arg(i)}$ c) $-\frac{3\arg(1+i\sqrt{3})}{\arg(i)}$.

2) La forme exponentielle du nombre complexe $-\sqrt{3} - i$ est : a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ b) $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ c) $\boxed{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}}$. (1)

3) Soit f unee fonction continue eet strictement croissante sur $[-1,3]$ vérifiant $f(-1) = -2$ et $f(3) = -1$ alorrs l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1,3[$:

a) Deux solutions ; a)une seule solution $\boxed{\text{c) aucune solution}}$ (1)