## Exercice 1

On considère dans un plan P un triangle ABC tels que: $AB = 2, AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

On désigne par D et E les points définis par: $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

On pose I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DE]$

1. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
   b. Calculer $(\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA})^2$. En déduire $AD$.
2. a. Montrer que les droites $(AC)$ et $(DE)$ sont perpendiculaires.
   b. Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$. En déduire $\cos(\widehat{CAD})$.
3. Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P : MD^2 - ME^2 = 12\}$. Vérifier que $C \in \Delta$. Déterminer $\Delta$.
4. a. Justifier que A est le barycentre des points pondérés $(E, 3)$ et $(C, -1)$
   b. Montrer que pour tout point du plan, on a: $3ME^2 - MC^2 = 2MA^2 - 6$.
   c. Déterminer et construire les ensembles suivants:
   $E_1 = \{M \in P : 3ME^2 - MC^2 = 20\}$ et $E_2 = \{M \in P : 3ME^2 - MC^2 + 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -6\}$

## Exercice 2

Dans la figure ci-contre AICJ est un rectangle tel que $AC = 4\sqrt{3}$ et B un point de [AI], tel que: $AB = BC = 4$

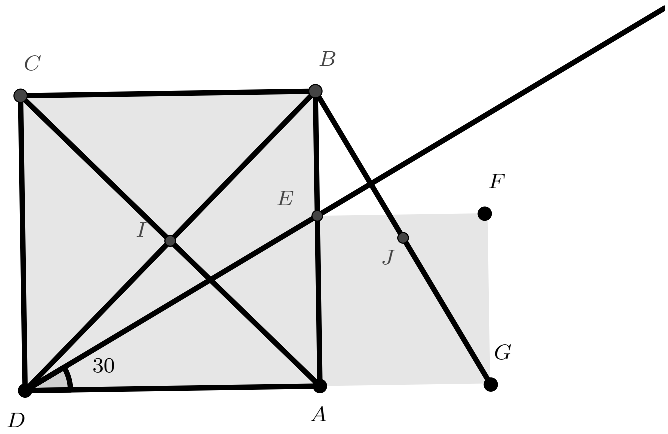
1. Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$
2. En déduire que $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{-1}{2}$ et que $BI = 2$
3. Montrer que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI} = 12$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} = 12$
4. En déduire que $(CB) \perp (IJ)$.
5. Soient $\Delta = \{M \in P : MA^2 - MB^2 = 32\}$ et $\Gamma = \{M \in P : MA^2 + MB^2 = 64\}$.
   a. Montrer que $M \in \Delta$ signifie $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$ avec O le milieu de $[AB]$.
   b. Montrer que $C \in \Delta$, puis déterminer $\Delta$.
   c. Montrer que $\Gamma$ est le cercle de centre O et passant par C.

## Exercice 3

Dans la figure ci-dessous, on considère les deux carées ABCD et AEFG où :
♠$AB = \sqrt{3}$

♠ E est le point du segment [AB] tel que $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{6}$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = 3$.
   b. En déduire que $DE = 2$ puis $AE = 1$.
2. a. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$.
   b. En déduire que les droites $(DE)$ et $(BG)$ sont perpendiculaires.
3. a. Montrer que $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB} = 3 + \sqrt{3}$.
   b. Vérifier que $\frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   c. En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
4. Soit I le milieu du segment $[AC]$.
   a. Montrer que pour tout point M du plan on a:$MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 3$.
   b. Déterminer l'ensemble $\zeta$ des points M du plan tels que $MA^2 + MC^2 = 7$.
5. On considère le repère $(A, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AE})$ et soit J le milieu de $[BG]$.
   a. Déterminer les coordonnées des points $A, G, E, B$ et $J$.
   b. Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AJ}$.
   c. Déduire la mesure de l'angle $\widehat{GAJ}$.


C
B
E
F
I
J
30
G
D
A