المدرسة الإعدادية نهج كراتشي باردو الأستاذة : الشريف	الدرس الأول : التعداد و الحساب	التاسعة أساسي سبتمبر 2022

I. مراجعة و تذكير : قابلية القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 4 وعلى 5 وعلى 8 وعلى 9 وعلى 25

تمرين

أي الكتابات التالية تمثل نتيجة القسمة الإقليدية لـ 227 على 11

أ) $227 = 11 \times 15 + 62$

ب) $227 = 11 \times 20 + 7$

ج) $227 = 6 \times 36 + 11$

ملاحظة

في القسمة الإقليدية المقسوم و القاسم و خارج القسمة و الباقي كلها أعداد صحيحة طبيعية حيث يكون القاسم مخالف لصفر و الباقي دائما أصغر من القاسم

مهما يكن a و b عددان صحيحان طبيعيان حيث b مخالف لصفرفإن $a = b \times q + r$

حيث q خارج قسمة a على b و r باقي القسمة $r < b$

a	b
r	q

مثال

257	45
32	5

إذن $257 = 45 \times 5 + 32$

ملاحظة

مهما يكن a و b عددان صحيحان طبيعيان حيث b مخالف لصفر

نقول أن a مضاعف لـ b أو a يقبل القسمة على b

أو b قاسم لـ a أو b يقسم a

إذا كان باقي قسمة a على b يساوي 0 أي إذا كان $a = b \times q$

حيث q خارج قسمة a على b

a	b
0	q

تطبيق

أجب بصواب أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية مع تعليل الإجابة

1) 221 مضاعف لـ 7 — خطأ (لأن $221 = 7 \times 31 + 4$)
2) 375 يقبل القسمة على 75 — صواب (لأن $375 = 75 \times 5$)
3) 12 قاسم لـ 288 — صواب (لأن $288 = 12 \times 24$)
4) 350 لا يقبل القسمة على 50 — خطأ (لأن $350 = 50 \times 7$)
5) 19 مضاعف لـ 19 — صواب (لأن $19 = 19 \times 1$)
6) 529 قاسم لـ 529 — صواب (لأن $529 = 529 \times 1$)
7) 10^{17} مضاعف لـ 10^5 — صواب (لأن $10^{17} = 10^5 \times 10^{12}$)

ملاحظة 1

مهما يكن عدد صحيح طبيعي مخالف لصفرفإن

1) كل عدد لا يقبل القسمة a على لا يقبل على مضاعفات a

مثال1 : 225 لا يقبل القسمة على 8 لأنه لا يقبل القسمة على 2

مثال2 : 5896492 لايقبل القسمة على 75 لأنه لايقبل القسمة على 25

2) كل عدد يقبل القسمة a على يقبل على قواسم a

مثال : 7700 يقبل القسمة على 77 إذن يقبل القسمة على 11 (11 من قواسم 77)

تمرين

أكمل الجدول التالي بـــ نعم أو لا

العدد	يقبل القسمة على						
	2	3	4	5	8	9	25
543	لا	نعم	لا	لا	لا	لا	لا
225	لا	نعم	لا	نعم	لا	نعم	نعم
450	نعم	نعم	لا	نعم	لا	نعم	نعم
3737	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا
10308	نعم	نعم	نعم	لا	لا	لا	لا
57600	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم	نعم

يكون العدد الصحيح الطبيعي قابلا للقسمة على :

2 : إذا كان رقم احاده زوجيا أي : 0 أو 2 أو 4 أو 6 أو 8

5 : إذا كان رقم احاده 0 أو 5

4 : إذا كان العدد المتكون من رقمي آحاده وعشراته مضاعفا لـ 4

25 : إذا كان العدد المتكون من رقمي آحاده وعشراته مضاعفا لـ 25 أي 00 أو25 أو 50 أو 75

8 : إذا كان العدد المتكون من أرقام آحاده وعشراته و مئاته مضاعفا لـ 8

3 : إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا لـ 3

9 : إذا كان مجموع أرقامه مضاعفا لـ 9

تمرين

عوض كل نقطة بالرقم المناسب ليكون العدد قابلا للقسمة على 4 و 9 في نفس الوقت .56.4

ليكون العدد قابلا للقسمة على 4 يجب أن يكون العدد المتكون من رقمي احاده وعشراته مضاعفا لـ 4

أي : 40 أو 44 أو 48 وبالتالي رقم الاحاد الناقص هو 0 أو 4 أو 8

وليكون العدد قابلا للقسمة على 9 : يجب أن يكون مجموع أرقامه مضاعفا لـ 9

إذن في كل حالة من رقم الاحاد نبحث رقم المئات ليكون المجموع مضاعفا لـ 9

وبالتالي مع رقم الاحاد 0 يكون رقم المئات 3 ومنه العدد هو 56340

مع رقم الاحاد 4 يكون رقم المئات 8 ومنه العدد هو 56844

مع رقم الاحاد 8 يكون رقم المئات 4 ومنه العدد هو 56448

ملاحظة 2

العدد الصحيح الطبيعي يكون
- معلوما وأرقامه معلومة مثال : 567492
- معلوما وأرقامه مجهولة مثال : 13^{29}
- مجهولا وأرقامه مجهولة مثال : a أو x

نستعمل قواعد قابلية القسمة إذا كان العدد معلوما وأرقامه معلومة

مثال1 : بين أن $4^{17}+4^{17}+4^{17}$ يقبل القسمة على 3

بما أن $4^{17}+4^{17}+4^{17} = 3 \times 4^{17}$

فإن $4^{17}+4^{17}+4^{17}$ يقبل القسمة على 3

مثال2 : بين أن $2^{2021}+3 \times 4^{1010}$ يقبل القسمة على 5

بما أن $2^{2021}+3 \times 4^{1010} = 2 \times 2^{2020}+3 \times (2^2)^{1010}$

$= 2 \times 2^{2020} + 3 \times 2^{2020}$

$= (2 + 3) \times 2^{2020}$

$= 5 \times 2^{2020}$

فإن $2^{2021}+3 \times 4^{1010}$ يقبل القسمة على 5

ملاحظة 3

نطبق نفس قواعد قابلية القسمة لمعرفة باقي قسمة أي عدد على 2 أو على 3 أو على 4 أو على 5 أو على 8 أو على 9 أو على 25

مثال1 : باقي قسمة 144474على 4 هو 2

لأن باقي قسمة العدد المتكون من رقمي أحاده وعشراته (74) على 4 هو 2

مثال2 : باقي قسمة 576172 على 3 هو 1 لأن باقي قسمة مجموع الأرقام على 3 هو 1

الأعداد الأولية

العدد الأولي هو عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 لا يقبل القسمة إلا على 1 و على نفسه

أي أن مجموعة قواسمه تكون ثنائية (بها عنصرين فقط)

نرمز بـ D_a لمجموعة قواسم العدد (a عدد صحيح طبيعي)

a عدد أولي يعني $D_a = \{1, a\}$

تطبيق

29 عدد أولي لأن $D_{29} = \{1,29\}$

789 عدد غير أولي لانه يقبل القسمة على 3

52345 عدد غير أولي لانه يقبل القسمة على 5

ملاحظة

1) 1 عدد غير أولي

2) كل الأعداد الأولية فردية ما عدى العدد 2

3) الأعداد الولية الأصغر من 100:

للحفظ أكيد

-2- 3- 5- 7- 11 -13 -17 -19 - 23- 29 –

31 – 37 – 41 – 43 – 47 – 53 - 59 –

61 – 67 – 71 -73 – 79 – 83 – 89 - 97

II. قابلية القسمة على 6 و على 12 و على 15

1) قابلية القسمة على 6

نشاط 1 ص 7

العدد	يقبل القسمة على 2	يقبل القسمة على 3	يقبل القسمة على 6
12576	نعم	نعم	نعم
483651	لا	نعم	لا
61457346	نعم	نعم	نعم
794564	نعم	لا	لا
25678231	لا	لا	لا

نلاحظ أن كل عدد يقبل القسمة على 2 و على 3 يقبل القسمة على 6

$2 \times 3 = 6$ و 2 و 3 عددان أوليان فيما بينهما (1 = ق.م.أ (2,3))

عموما

يكون العدد الصحيح الطبيعي قابلا للقسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على 2 و على 3

تطبيق 1

اذكر من بين الأعداد التالية الأعداد تلك التي تقبل القسمة على 6

34678327 , 123679074 , 3256782 , 43167890

الإصلاح

- 43167890 لا يقبل القسمة على 3 (لأن مجموع أرقامه ليس مضاعفالـ 3) إذن لا يقبل على 6
- 3256782 يقبل القسمة على 2 (لأن رقم احاده زوجي)
  و يقبل القسمة على 3 (لأن مجموع أرقامه مضاعف لـ 3) إذن يقبل على 6
- 123679074 يقبل القسمة على 2 و على 3 إذن يقبل على 6
- 34678327 لا يقبل القسمة على 2 إذن لا يقبل على 6

تطبيق 2

عوض كل نقطة بالرقم المناسب ليكون العدد قابلا للقسمة على 6 (كل الإمكانيات)

. 5468932 , 3412892.4

الإصلاح

- . 5468932

العدد . 5468932 يقبل القسمة على 6 إذا كان يقبل على 2 و على 3 وبالتالي يجب أن يكون رقم آحاده زوجيا و مجموع أرقامه مضاعفا لـ 3

إذن الحلول هي : 54689322 أو 54689328

- 3412892.4

العدد 3412892.4 رقم آحاده زوجي إذن يقبل القسمة على 2 مهما كان الرقم الناقص وبالتالي نبحث عن الرقم الناقص (رقم العشرات) ليكون العدد قابلا للقسمة على 3

(أي مجموع الأرقام مضاعف لـ 3)

إذن الحلول هي 341289204 أو 341289234 أو 341289264 أو 341289294

يمكننا أيضا أن نستعمل المخطط التالي ويسمى **شجرة الإختيار**

تطبيق 3

1) كل عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على 24 يقبل القسمة على 6
2) كل عدد صحيح طبيعي رقم احاده 0 و يقبل القسمة على 3 يقبل القسمة على 6
3) العدد $3^{32} + 2 \times 9^{15}$ يقبل القسمة على 6

الاصلاح

1) صواب لأن 24 مضاعف لـ 6
2) صواب لأن كل عدد رقم احاده 0 يقبل القسمة على 2 و بما أنه يقبل القسمة على 3 (معطى) فهو يقبل على 6
3) خطأ لأن $3^{32} + 2 \times 9^{15} = 3^{32} + 2 \times (3^2)^{15}$
$= 3^2 \times 3^{30} + 2 \times 3^{30}$
$= (3^2 + 2)3^{30} = 11 \times 3^{30}$

لا يقبل على 2 (لأن قواسمه الأولية هي 3 و 11) إذن لا يقبل القسمة على 6

2) قابلية القسمة على 12

نشاط 1 ص 8

العدد	يقبل القسمة على 3	يقبل القسمة على 4	يقبل القسمة على 12
7653480	نعم	نعم	نعم
1247632	لا	نعم	لا
71963628	نعم	نعم	نعم
2485326	نعم	لا	لا

نلاحظ أن كل عدد يقبل القسمة على 3 و على 4 يقبل القسمة على 12
$4 \times 3 = 12$ و 3 و 4 عددان أوليان فيما بينهما (1 = ق.م.أ (3,4))

عموما

يكون العدد الصحيح الطبيعي قابلا للقسمة على 12 إذا كان يقبل القسمة على 3 و على 4

تطبيق 1

اذكر من بين الأعداد التالية الأعداد تلك التي تقبل القسمة على 12

34678327 , 123679072 , 3256764 , 23167890

الاصلاح

- 23167890 لا يقبل القسمة على 4 (لأن 90 ليس مضاعفالـ 4) إذن لا يقبل على 12
- 3256764 يقبل القسمة على 4 (لأن 64 يقبل على 4)
و يقبل القسمة على 3 (لأن مجموع أرقامه مضاعف لـ 3) إذن يقبل على 12

- 123679072 لا يقبل القسمة على 3 إذن لا يقبل على 12
- 34678327 لا يقبل القسمة على 2 إذن لا يقبل على 12

تطبيق 2

عوض كل نقطة بالرقم المناسب ليكون العدد قابلا للقسمة على 12 (كل الإمكانيات)

5468932 . ، 3412892.4

الإصلاح

- 5468932 .

العدد 5468932 . يقبل القسمة على 12 إذا كان يقبل على 4 و على 3 وبالتالي يجب أن يكون العدد المتكون من رقم احاده وعشراته مضاعفا لـ 4 و مجموع أرقامه مضاعفا لـ 3

إذن الحل الوحيد هو : 54689328

- 3412892.4

ليكون العدد قابلا للقسمة 4 على4 يجب ان يكون العدد المتكون من الاحاد والعشرات 4 . مضاعفا لـ 4

أي يكون 40 أو 42 أو 44 أو 46 أو 48

و ليكون العدد قابلا للقسمة على 3 (أي مجموع الأرقام مضاعف لـ 3)

إذن الحلول هي 341289204 أو 341289264

تطبيق 3

أجب بصواب أو خطأ في كل حالة من الحالات التالية

1) العدد 1314151920 لا يقبل القسمة على 12
2) كل عدد يقبل القسمة على 6 يقبل القسمة على 12
3) باقي قسمة 324786715 على 12 هو 2
4) كل عدد يقبل القسمة على 48 يقبل القسمة على 12
5) كل عدد يقبل القسمة على 8 و يقبل القسمة على 9 يقبل على 12

3) قابلية القسمة على 15

نشاط 1 ص 9

العدد	يقبل القسمة على 5	يقبل القسمة على 3	يقبل القسمة على 15
12576345	نعم	نعم	نعم
468326451	لا	نعم	لا
26574360	نعم	نعم	نعم
467445650	نعم	لا	لا

نلاحظ أن كل عدد يقبل القسمة على 3 و على 5 يقبل القسمة على 15

$5 \times 3 = 15$ و 3 و 5 عددان أوليان فيما بينهما (1 = ق.م.أ (3,5))

عموما

يكون العدد الصحيح الطبيعي قابلا للقسمة على **15** إذا كان يقبل القسمة على **3** و على **5**

تطبيق 1

اذكر من بين الأعداد التالية الأعداد تلك التي تقبل القسمة على 15

29185470 , 146790745 , 3256764 , 23167890

الإصلاح

- 23167890 يقبل القسمة على 5 (رقم احاده 0)
و يقبل القسمة على 3 (لأن مجموع أرقامه مضاعف لـ 3) إذن يقبل على 15
- 3256764 لا يقبل القسمة على 5 إذن لا يقبل على 15
- 146790745 لا يقبل القسمة على 3 إذن لا يقبل على 15
- 29185470 يقبل القسمة على 5 و يقبل القسمة على 3 إذن يقبل على 15

تطبيق 2

عوض كل نقطة بالرقم المناسب ليكون العدد قابلا للقسمة على 15 (كل الإمكانيات)

5468932 . , 34128924 .

الإصلاح

- 5468932 .
العدد 5468932 . يقبل القسمة على 15 إذا كان يقبل على 5 و على 3 وبالتالي يجب أن يكون رقم احاده 0 أو5 و مجموع أرقامه مضاعفا لـ 3
إذن الحل الوحيد هو : 54689325
- 34128924 . يقبل القسمة على 15 إذا كان يقبل على 5 و على 3
وبالتالي يجب أن يكون رقم احاده 0 أو5 و مجموع أرقامه مضاعفا لـ 3
إذن الحل الوحيد 0 34128924

تطبيق 3

ليكن $a = 27^{1111} - 7 \times 3^{3330}$ بين أن a يقبل القسمة على 15

الإصلاح

$$a = 27^{1111} - 7 \times 3^{3330}$$
$$= (3^3)^{1111} - 7 \times 3^{3330}$$
$$= 3^{3\times 1111} - 7 \times 3^{3330}$$
$$= 3^{3333} - 7 \times 3^{3330}$$

$$= 3^3 \times 3^{3330} - 7 \times 3^{3330}$$
$$= (3^3 - 7) \times 3^{3330}$$
$$= (3^3 - 7) \times 3^{3330}$$
$$= (27 - 7) \times 3^{3330}$$
$$= 20 \times 3^{3330}$$
$$= 5 \times 4 \times 3 \times 3^{3329}$$
$$= 15 \times 4 \times 3^{3329}$$

و بالتالي a يقبل القسمة على 15

III. أنشطة في التعداد

كم مجوعة منتهية

نعتبر المجموعات التالية : $\mathbb{N}$ مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية

و D_{24} مجموعة قواسم العدد 24

و M_{10} مجموعة مضاعفات العدد 10

A مجموعة السنوات الميلادية من 2011 إلى 2021

أذكر كل عناصر كل مجموعة إن أمكن ذلك

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6, \dots \dots\}$$
$$D_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$$
$$M_{10} = \{0,10,20,30,40,50,60, \dots \dots .\}$$
$$A = \{2011,2012,2013,2014,2015,2016,2017,2018,2019,2020,2021\}$$

بالمجموعة D_{24} عدد محدود من العناصر 8 فقط

كذلك بالسبة للمجموعة A بها 11 عنصر

بالنسبة للمجموعة $\mathbb{N}$ بها عدة عناصر أي عددعناصرها غير محدود

وكذلك M_{10} عدد عناصرها غير محدود

تعريف

1) إذا كان عدد عناصر مجموعة ما محدودا نقول ان المجموعة منتهية

وإذا كان غير محدود نقول ان المجموعة غير منتهية

مثال

a عدد عدد صحيح طبيعي و D_a مجموعة قواسمه و M_a مجموعة مضاعفاته

بما أن لكل عدد : عدد معين من القواسم و عدة مضاعفات

إذن D_a مجموعة منتهية و M_a مجموعة غير منتهية

2) كم مجموعة منتهية هو عدد عناصرها

مثال 8= كم (D_{24}) و 11= كم (A)

نشاط

1) كم عدد فردي يتكون من رقمين
2) كم عدد فردي يتكون من رقمين مختلفين
3) كم عدد فردي يتكون من رقمين و رقم عشراته مضاعف لـ 3

الاصلاح

1) أمثلة لعدد فردي يتكون من رقمين 45 , 77, 19 , 91 , ...
لنبحث عن كم هذه الأعداد
ليكن ab عدد يتكون من رقمين حيث a رقم عشراته و b رقم احاده

عدد فردي يتكون من رقمين اي ab عدد فردي إذن b يجب ان يكون رقم فردي

و بالتالي b يساوي 1 أو 3 أو 5 أو 7 أو 9

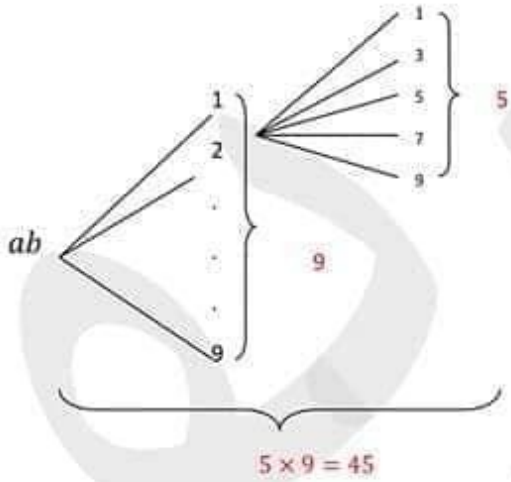
و a رقم العشرات إذن a يساوي 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 أو 7 أو 8 أو 9

إذن للرقم b 5 إمكانيات و كل إمكانية تتبعها 9 إمكانيات للرقم a

و بالتالي لـ ab $9 \times 5 = 5 \times 9 = 45$

أي هناك 45 عدد فردي يتكون من رقمين

يمكننا فهم ذلك أيضا باستعمال شجرة الإختيار



2) العدد ab يتكون من رقمين مختلفين و هو فردي إذن إذا كان a زوجي فإن a و b دنما مختلفين
و بالتالي لـ a 4 إمكانيات (a يساوي 2 أ 4 أو 6 أو 8) و لكل إمكانية لـ a تتبعها
5 إمكانيات لـ b اي عدد الأعداد ab في هذه الحالة هو $5 \times 4 = 20$
بينما إذا كان a فردي فإن a و b ليسا دنما مختلفين
و بالتالي لـ a 5 إمكانيات (a يساوي 1 أ 3 أو 5 أو 7 أو 9) لكل إمكانية لـ a تتبعها
4 أمكانيات لـ b أي عدد الأعداد ab في هذه الحالة هو $4 \times 5 = 20$