الرياضيات

I - الدوال العددية:

قواعد الحساب:

أ- المتطابقات الشهيرة:

* من الدرجة الأولى الثانية:

* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

* من الدرجة الثالثة:

* $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
* $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$
* $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

ب- حل معادلات من الدرجة الثانية:

* حساب المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$

إذا كان: $\Delta > 0$	إذا كان: $\Delta = 0$	إذا كان: $\Delta < 0$
المعادلة تقبل حلين: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة تقبل حل مضاعف: $x' = \frac{-b}{2a}$	المعادلة لا تقبل حلول.

* تحليل دالة من الدرجة الثانية:

إذا كان: $\Delta > 0$	إذا كان: $\Delta = 0$	إذا كان: $\Delta < 0$
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$	لا يمكن التحليل

* إشارة الدالة من الدرجة الثانية:

إذا كان: $\Delta > 0$			إذا كان: $\Delta = 0$		إذا كان: $\Delta < 0$	
$-\infty$	x_1	x_2	$-\infty$	x_0	$-\infty$	$+\infty$
مثل a	عكس a	مثل a	مثل a	عكس a	مثل a	

ج- خواص القيمة المطلقة:

$\sqrt{x^2} = |x|$; $|-x| = |x|$; $|x| \geq 0$

$|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x \times y| = |x| \times |y|$; $|x+y| \leq |x| + |y|$

د- قواعد الحصر:

* لتكن a, b, c, d أعداد موجبة تماما:

$a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$:

- جمع:

$a+c \leq x+y \leq b+d$

- طرح:

$a-d \leq x-y \leq b-c$

- ضرب:

$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$

- قسمة:

$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

٥- النهايات :

* حالات عدم التعيين : (4) :

* الجمع : $\infty - \infty$
* الضرب : $0 \times \pm\infty$
* القسمة : $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ؛ $\frac{0}{0}$

* كيفية إزالة حالات عدم التعيين :

* الإختزال (تحليل واختزال) * المرافق
* التحليل * العدد المشتق
* تغيير المتغير

* نهاية دالة كثيرة الحدود :

نهايتها في $\pm\infty$ هي العد الأعلى درجة

* نهاية الدالة الناطقة :

نهايتها في $\pm\infty$ هي العد الأعلى درجة في البسط و العد الأعلى درجة في المقام .
يجب الإختزال في حالة وجوده

* نهاية دالة عند عدد :

نعوض مباشرة في الدالة ذلك العدد .

الأكبر $>$ لاتعني 0^+ والأصغر لاتعني 0^- ، إمثارة المقام هي التي تحدد إشارة 0 . التربيع دائما 0^+ سواء عدد أو جذر

أمثلة :

* $\lim_{x \to +\infty} -x^3 + 2x^2 = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$
* $\lim_{x \to 4^>} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty \quad \{ \frac{3}{0^+}$
* $\lim_{x \to 4^<} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty \quad \{ \frac{3}{0^+}$

* نهايات شهيرة :

* $\sqrt{+\infty} = +\infty$
* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

* نهاية دالة مركبة :

* $\lim_{x \to \pm\infty / N} V_0 V(x) = \lim_{x \to \pm\infty / N} V(V(x)) = c$

أي :

$$\begin{cases} * \lim_{x \to \pm\infty / N} V(x) = b \\ * \lim_{x \to b} U(x) = c \end{cases}$$

* نهايات شهيرة (2) :

$\frac{0}{\infty} = 0$ ؛ $\frac{l}{\infty} = 0$ ؛ $\frac{\infty}{0} = \infty$

$\frac{l}{0} = \infty$ $(l = \text{عدد})$

* نهايات الدوال المرجعية :

دالة مقلوب	دالة جذر	دالة x^N
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^-$	* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	* $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	* $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+$	لما n زوجي :
* $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = -\infty$	* $\lim_{x \to a^>} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = +\infty$	* $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
* $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$	* $\lim_{x \to a^<} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = +\infty$	لما n فردي :
		* $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$

عند طرق إزالة حالة عدم التعيين بالنسبة للدوال الجذرية عند $\pm\infty$ أو x_0 نضرب ونقسم في المرافق .
وعندما يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك .

أمثلة :

* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x+2}{x-4}} = 1$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-4} = 1$
* $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$
* $\lim_{x \to 0} \cos\left(\pi \frac{\sin x}{x}\right) = 1$

أمثلة عن حالات عدم التعيين:

* تحليل واختزال: (كثيرة الحدود)

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^2-4} = \text{ح.غ.ت} \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

البسط: ⟸ المقام: ⟹

	1	0	0	8
-2	0	-2	4	-8
	1	-2	4	0

	1	0	-4
-2	0	-2	4
	1	-2	0

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{12}{-4} = -3$$

(عدد x ، x ، x^2)

* الاختزال: (نتخلص من x)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x} = \text{ح.غ.ت}$$

$$(x+2)^3 = x^3+8+6x^2+12x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+8+6x^2+12x-8}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3+6x^2+12x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+6x+12)}{x}$$

$$= 0$$

* المرافق: (الدوال الجذرية)

$$\lim_{x\to -\infty} x+\sqrt{x^2+3} = -\infty+\infty = \text{ح.غ.ت}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(x+\sqrt{x^2+3})(x-\sqrt{x^2+3})}{(x-\sqrt{x^2+3})}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-x^2-3}{x-\sqrt{x^2+3}} = \lim_{x\to -\infty}\frac{-3}{x-\sqrt{x+3}} = \frac{3}{-\infty} \to 0$$

* العدد المشتق:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

عند دراسة قابلية الاشتقاق نعوض x_0 نجد النتيجة تساوي عدد

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \text{ح.غ.ت}$$

* $f(x) = \sqrt{x-1}$
* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$
* $f'(2) = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \text{ح.غ.ت} = \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) = 12$$

* $f'(x) = 3x^2$
* $f'(2) = 12$

* تغيير المتغير

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2}\cdot\frac{\sin 6x}{3x}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin 6x}{6x} = \lim_{X\to 0} 2\cdot\frac{\sin X}{X} = 2$$

$X = 6x$ ؛ $x \to 0$ ؛ $X \to 0$

عند تغيير المتغير نحاول أن نجعل البسط يساوي المقام بالضرب و القسمة على عدد.

و. الإشتقاقية :

* معادلة المماس :

* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

x_0 صورة بالدالة f ، $f'(x_0)$ العدد المشتق

* وجود مماس عند الفاصلة x_0 معامل توجيهه هو العدد المشتق .
* إذا كان المماس يوازي مستقيم $y = ax + b$ فإن $a = f'(x_0)$
* المماس الذي يوازي محور الفواصل معامل توجيهه 0 معناه : $f'(x_0) = 0$

أمثلة :

1- لدينا : $f(x) = 3x^2 - 2$ ، $x_0 = 1$

أكتب معادلة المماس عند الفاصلة $x_0 = 1$:

* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

* $f'(1) = 6$
* $f(1) = 3(1) - 2 = 1$

$y = 6(x - 1) + 1$
$y = 6x - 6 + 1$
$y = 6x - 5$ وهو المطلوب

2- لدينا : $f(x) = x^2 + x + 1$

أكتب معادلة المماس عند النقطة $A(0,1)$

* $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
$y = f'(0)x + 1$

* $f'(0) = 1$

$y = 1x + 1$
$y = x + 1$ وهو المطلوب

3- أكتب معادلة المماس عند النقطة $B(2, \frac{1}{3})$ الذي يوازي $y = 5x + 4$

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(2)(x - 2) + \frac{1}{3}$
$y = 5(x - 2) + \frac{1}{3}$

أنظر إلى القاعدة ...

4- أكتب معادلة المماس عند النقطة $C(3, -1)$ يوازي محور الفواصل :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
$y = f'(3)(x - 3) + f(3)$
$y = f'(3)(x - 3) - 1$
لأن $f'(3) = 0$
$y = -1$

* مشتقات الدوال المألوفة :

* $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (مشتق ماتحت الجذر / 2 × √ماتحت الجذر)
* $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$ (مشتق المقام - / (المقام)²)

أمثلة :

* $f(x) = \sqrt{-x+1}$ ، $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{-x+1}}$
* $f(x) = \frac{1}{2x+3}$ ، $f'(x) = \frac{-2}{(2x+3)^2}$

* $(U+V)' = U' + V'$
* $(U \times V)' = U' \times V + V' \times U$
(مشتق الأول × الثاني + مشتق الثاني × الأول)
* $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - V' \times U}{V^2}$
$\frac{\text{مشتق البسط} \times \text{المقام} - \text{مشتق المقام} \times \text{البسط}}{(\text{المقام})^2}$
* $(\lambda f(x))' = \lambda f'(x)$
* $\left(\frac{1}{U}\right)' = \frac{-U'}{U^2}$ $\frac{\text{مشتق المقام}}{(\text{المقام})^2}$
* $(\sqrt{U(x)})' = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}}$

الإشتقاقية
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

* دراسة إتجاه التغير :

1- المشتقة (النهايات دالة)
2- إشارة المشتقة
3- إتجاه التغير
$f'(x) > 0$ ⇐ f متزايدة تماماً
$f'(x) < 0$ ⇐ f متناقصة تماماً
4- جدول التغيرات

غالباً ما يطرح السؤال بإدرس تغيرات الدالة .

II - المعلم و المنحنيات :

* المستقيمات المقاربة :

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \mp\infty$ * ⟵ (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = x_0$

مثال :

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = -\infty \left\{ \frac{10}{0^-} \right.$
$\lim_{x \to 5^+} f(x) = +\infty \left\{ \frac{10}{0^+} \right.$
⟵ م.م.ع (C_f)

2) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$ * ⟵ (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = y_0$ بجوار $\pm\infty$

مثال :

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *
$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$ *
⟵ $y = 0$ م.م (C_f) ل.ت

3) المستقيم المقارب المائل :

تعيين : بين أن $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

ج : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$

مثال : لدينا الدالة : $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

بين أن $y = 2x - 1$ م.م.م لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1 - (2x - 1)}{x + 2}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3x - 1 - 2x^2 - 4x + x + 2}{x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x + 2} = 0$

ومنه $y = 2x - 1$ م.م.م لـ (C_f) عند $+\infty$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x + 2} = 0$

ومنه $y = 2x - 1$ م.م.م لـ (C_f) عند $-\infty$

تع 2 : أوجد معادلة المقارب المائل

ج : لدينا : $f(x) = ax + b + g(x)$

و : $\lim g(x) = 0$ عند $\pm\infty$ ومنه :

$y = ax + b$ م.م.م لـ (C_f)

مثال :

لدينا الدالة : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$

بين أن (C_f) يقبل م.م.م يطلب تعيين معادلته

لدينا : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$

و : $\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$ / $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$

ومنه $y = x + 1$ م.م.م لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$

تع : أحسب / بين أن $\lim f(x) - (ax + b) = 0$ عند $\pm\infty$ أو فسر النتيجة بيانياً .

Use the following notes to write a composition

ج: $y=ax+b$ م.م.م.ل (C_f) عند $\pm\infty$

مثال: بين أن $\lim_{x\to-\infty} f(x)-2x+1=0$ ماذا تستنتج؟

$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(2x-1)=0$

ومنه $y=2x-1$ م.م.م.ل C_f عند $-\infty$

* التقاطع مع محاور الإحداثيات:

- مع محور الفواصل:

نحل المعادلة $f(x)=0$ $(x_1,0)$ $(x_2,0)$

- مع محور التراتيب:

نحسب $f(0)$ $[f(0),0]$

إذا طلب منا حل المعادلة $f(x)=0$ فإن التفسير البياني أو الاستنتاج هو التقاطع مع محور الفواصل

* شفعية دالة:

1- الدالة الزوجية:

لما $x\in D$ ؛ $-x\in D$: $f(-x)=f(x)$

تفسيرها الهندسي: C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب

2- الدالة الفردية:

لما $x\in D$ ؛ $-x\in D$: $f(-x)=-f(x)$

تفسيرها الهندسي: C_f متناظر بالنسبة للمبدأ.

* مركز تناظر ومحور تناظر الدالة:

1- مركز تناظر:

لدينا: $\Omega(a,b)$ مركز تناظر

(1) $f(2a-x)+f(x)=2b$

(2) $f(a-x)+f(a+x)=2b$

مثال: f دالة معرفة على $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ بـ: $f(x)=1+\frac{1}{x-2}$

بين أن النقطة $\Omega(2,1)$ مركز تناظر لـ C_f ؟

ب1: $f(2\times2-x)+f(x)=2\times1$

$f(4-x)+f(x)=?2$

$*\ f(4-x)+f(x)=1+\frac{1}{(4-x)-2}+1+\frac{1}{x-2}$

$=2+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x-2}=2$

ب2: $f(2-x)+f(2+x)=?2$

$f(x)=1+\frac{1}{x-2}$

$*\ f(2-x)+f(2+x)=1+\frac{1}{2-x-2}+1+\frac{1}{2+x-2}$

$=2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=2$

مثال (2): بين أن $f(2-x)+f(x)=4$ ماذا تستنتج؟ فسر النتيجة؟

لدينا: $f(2-x)+f(x)=4$

و $f(2a-x)+f(x)=2b$ } بالمطابقة

$2a=2$ $2b=4$

$a=1$ $b=2$

ومنه النقطة $(1,2)$ مركز تناظر

(نفس الطريقة بالمطابقة للقانون 2)

2- محور تناظر:

لدينا: $x=\alpha$ محور تناظر

(1) $f(2\alpha-x)=f(x)$

(2) $f(\alpha-x)=f(\alpha+x)$

مثال: f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x-2)^2+3$

بين أن $x=2$ محور تناظر لـ C_f ؟

ب1: $f(2\times2-x)=f(x)$

$f(4-x)=f(x)$

$*\ f(4-x)=(4-x-2)^2+3=(2-x)^2+3$

ب2: $f(2-x)=f(2+x)$

$*\ f(2-x)=(2-x-2)^2+3=(-x)^2+3=x^2+3$

$*\ f(2+x)=(2+x-2)^2+3=(x)^2+3=x^2+3$

ومنه $f(2+x)=f(2-x)$ إذن $x=2$ محور تناظر

* المنحنى المقارب:

لإثبات أن C_g منحنى مقارب لـ C_f:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-g(x)=0$

* الوضع النسبي:

- (C_f) و مستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=ax+b$ أو (C_f) و (C_g) :

$f(x)-y$ أو $f(x)-g(x)$:

ندرس إشارة الفرق

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
و.ن	(C_f) أسفل (Δ)		تقاطع $(-3;-3)$		(C_f) أعلى (Δ)

لإيجاد الترتيبة نعوض في المستقيم

$f(x)-y>0$: (C_f) فوق (Δ)

$f(x)-y<0$: (C_f) يقع تحت (Δ)

$f(x)-y=0$: (C_f) و (Δ) يتقاطعان

* إشارة الدالة :

x	مجال تعريف	تقاطع مع محور الفواصل	مجال تعريف
$f(x)$	$+$	0	$-$

أعلى محور الفواصل أسفل محور الفواصل

ملاحظة: غالبًا ما يأتي الوضع النسبي بعد مستقيم مقارب المائل :

الفرق $f(x)-y$ نحسب $\lim_{x\to\pm\infty}$ الفرق $=0$ $x\to\pm\infty$

مثال: بين أن $y=x$ م.م.م لـ (C_f) عند $+\infty$ و $-\infty$ ثم أدرس وضعيته؟

لدينا: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^3-6}{x^2+2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6}{x^2+2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{x}=0$$

ومنه $y=x$ م.م.م (C_f) عند $\pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0$$

الوضع النسبي :

$$f(x)-y=f(x)-x=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

$x^2+2>0$ موجبة (لاتؤثر)

$-2x-6=0$ أي $-2x=6$ أي $x=-3$

الجدول :

* معادلة المستقيم الآخر: ⚠

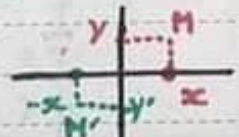
بين أن $y=ax+b$ م.م.م ؛ إستنتج معادلة المستقيم الآخر !

1- الدالة الزوجية :

$y=a(-x)+b$ هو المقارب الآخر

2- الدالة الفردية :

$-y=a(-x)+b$ هو المستقيم المقارب الآخر



كيفية إستخراج $f(\alpha)$: (بين $f(\alpha)=0$ ثم عين حصرًا لـ $f(\alpha)$:

1) نذهب لـ $f(x)$ مكان x نضع α

2) نقوم بمقارنة $f(x)$ التي تحصلت عليها مع $f(x)$ المطلوبة ، نستخرج الفكر الزائدة (x^2 ، x^3 ...)

3) نذهب لـ $g(x)$ مكان x نضع α ونساويها

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

للصفر نستخرج الفكر الزائدة.

4) نصعد $f(x)$ التي تحصلت عليها نعوض فيها الفكر ونقوم بالتبسيط.

عملية الحصر تكون باستعمال $f(x)$ العبارة المعطاة في التمرين.

مثال: لدينا: $f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$ و $g(x)=x^2-3x-4$

بين أن:

$$f(x)=1+\frac{3x+6}{x^2-1}$$

$$f(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2-1}$$

x^3 يجب أن يعوض: $x^2-3x-4=0$

$x^3=3x+4$

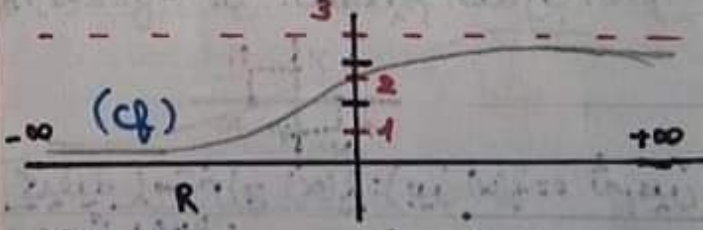
$$f(x)=\frac{3x+4+x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2+3x+5}{x^2-1}$$

x^2+3x+5	x^2-1
$-x^2-1$	1
$3x+6$	

$$f(x)=1+\frac{3x+6}{x^2-1}$$

III - القراءات البيانية والمماسات:

* النهايات:



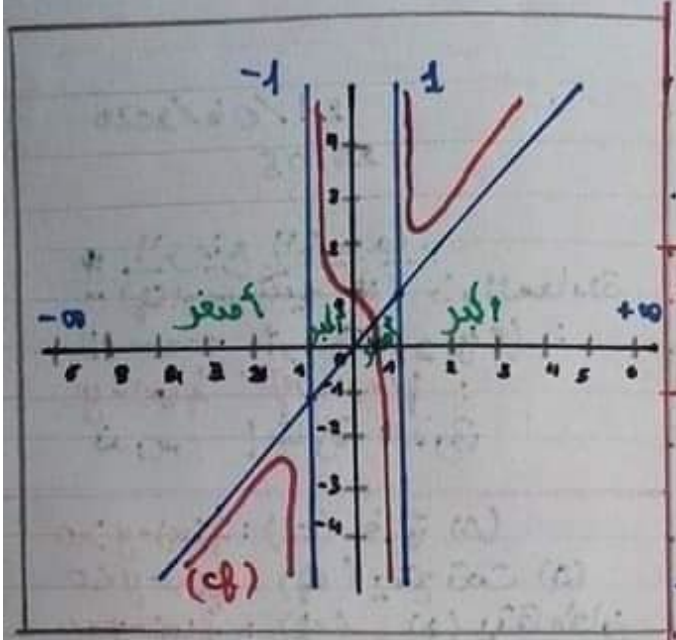
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=3$

* إشارة الدالة: } مثال 2 للنهايات

انظر الصفحة (7)

مثال:

لدينا مجال التعريف: $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to-1^<} f(x)=-\infty$ $\lim_{x\to1^<} f(x)=-\infty$

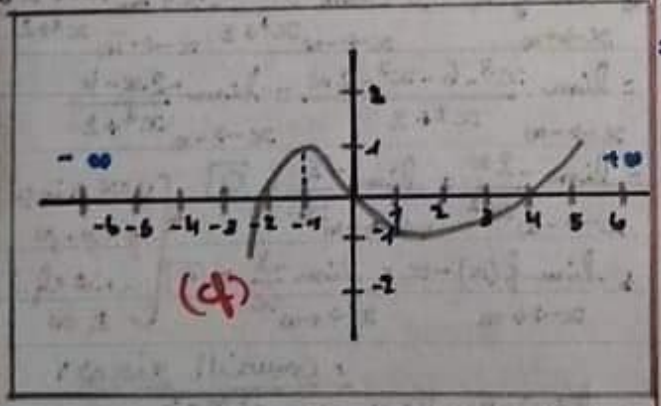
$\lim_{x\to-1^>} f(x)=+\infty$ $\lim_{x\to1^>} f(x)=+\infty$

* إشارة الدالة (2):

انظر الصفحة (7) السابقة

مثال:

لدينا الدالة معرفة على $\mathbb{R}$:



x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

أعلى م.ن أسفل أعلى أسفل

* إشارة المشتقة :

x	مجموعة التعريف	فواصل قيم حدية محلية للتوابع	
$f'(x)$	+	0	−

متناقصة — متزايدة

+ ↗ − ↘

∩ ∪

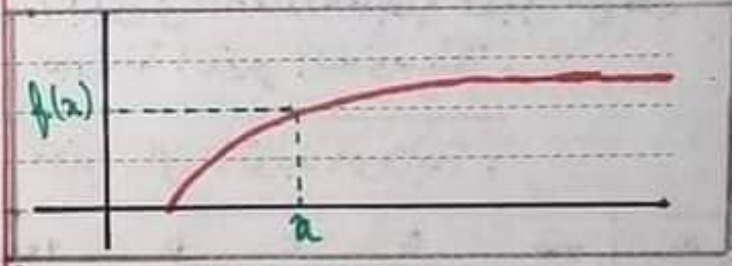
مثال :

(نفس المنحنى السابق)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	− 0	+

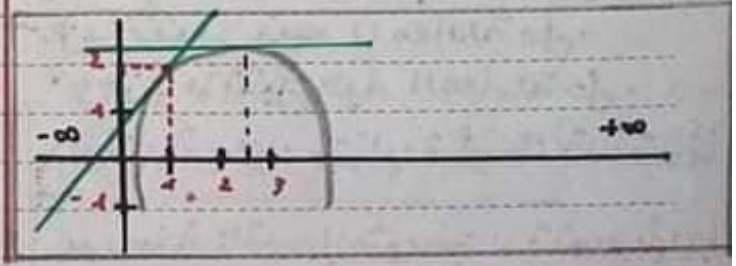
* كيف أوجد $f(x)$:

نسقط على الدالة ومن الدالة لمحور التراتيب



* العدد المشتق بيانيا :

نذهب إلى x_0 نسقط على الدالة نجد مماس نستخرج منه نقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2)

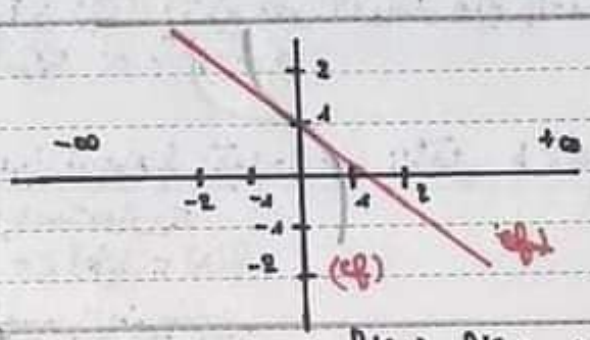


$* f'(1) = \frac{2-1}{1-0} = \boxed{1}$ $(0,1)$ $(1,2)$

لأن المماس يوازي نفسه. فـ $f'(2,5) = 0$ *

مثال :

$f''(x_0) = ?$



$* f''(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x-0} = f''(0)$

النقطة التي يخترق فيها المماس تسمى الدالة نقطة إنعطاف .

Use the following page
www.caar.dz
La CAAR, la confiance en commun

* مبرهنة القيم المتوسطة :

1- بين أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $a<\alpha<b$: $[a,b]$

أ) الإستمرارية

ب) الرتابة

ج) $f(a)\times f(b)<0$

التفسير الهندسي :

بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل مرة واحدة في الفاصلة α ؛ $a<\alpha<b$

2) بين أن $f(x)=0$ تقبل حل على الأقل $a<\alpha<b$:

أ) الإستمرارية

ب) $f(a)\times f(b)<0$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقطع محور الفواصل مرة على الأقل عند الفاصلة $a<\alpha<b$

3) بين أن $f(x)=k$ تقبل حل وحيد α ؛ $a<\alpha<b$:

أ) الإستمرارية

ب) الرتابة

ج) $f(a)<k<f(b)$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقطع $y=k$ مرة وحيدة في $a<\alpha<b$

4) بين أن $f(x)=k$ تقبل حله على الأقل α ؛ $a<\alpha<b$:

أ) الإستمرارية

ب) $f(a)<k<f(b)$

التفسير الهندسي :

(C_f) يقطع $y=k$ مرة عله الأقل $a<\alpha<b$

5) بين أن $f(x)=0$ تقبل حلين α و β :

$0<\alpha<1$	$0<\beta<1$
أ) استمرارية	أ) إستمرارية
ب) رتابة	ب) رتابة
ج) صور	ج) صور

6) بين أن $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $a<\alpha<b$:

$f(0)=0$ ومنه يوجد حل معدوم α نطبق عليها مبرهنة القيم المتوسطة

7) بين أن $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α في $[0,+\infty[$ تحقق أن $4<\alpha<7$:

بين أ: أ) مبرهنة القيم المتوسطة

أ) استمرارية

ب) رتابة

ج) نهايات أو صور

بين ب: نجيب على التحقيق بحساب الصور

$f(a)\times f(b)<0$

ملاحظات :

- معادلين السؤالين ليس لهما نفس الإجابة :

أ) حل المعادلة $f(x)=0$ ⇐ نقوم بإيجاد الحلول

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل ⇐ مبرهنة القيم المتوسطة .

-في حال لاتوجد الرتابة :

α	$-\infty$	a	c	b	$+\infty$
$f(x)$					

إذا لم نتحصل على الرتابة نقسم المجال :

- جزء تقبل فيه المعادلة حل.
- وجزء لا تقبل فيه المعادلة حل.

الرتابة هي: متزايدة أو متناقصة تمامًا

مبرهنة القيم المتوسطة لا تقوم بإيجاد الحلول بل تؤكد فقط وجود الحلول

أسئلة المماسات :

1) أكتب معادلة المماس عند الفاصلة x_0 :

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

عدد المشتق — صورة

---

2) أكتب معادلة المماس عند النقطة $A(x_A ; y_A)$:

$y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$

عدد المشتق — y_A

---

3) أكتب معادلة المماس عند الترتيبة y_0 :

- نبحث أولاً عن x_0
- نحل المعادلة $f(x) = y_0$

---

4) أكتب معادلة المماس الذي معامل توجيهه a :

- نبحث أولا عن x_0
- نحل المعادلة : $f'(x) = a$

---

5) أكتب معادلة المماس الذي يوازي $y = ax + b$:

- نبحث أولاً عن x_0
- نحل المعادلة : $f'(x) = a$

---

6) أكتب معادلة المماس الذي يشمل $B(x_B ; y_B)$:

- نبحث أولاً عن
- نحل المعادلة : $y_B = f'(x_0)(x_B - x_0) + f(x_0)$

---

* الحصر :

إذا كانت الدالة f :

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	↘	$f(b)$

الدالة رتيبة تماما

$a < x < b$

$f(b) < f(x) < f(a)$

لا يغير الاتجاه

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	↗	$f(b)$

$a < x < b$

$f(a) < f(x) < f(b)$

لا يغير الاتجاه

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	↘	$f(b)$

$a < x < b$

$f(b) < f(x) < f(a)$

يغير الاتجاه

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	↗	$f(b)$

$a < x < b$

$f(a) < f(x) < f(b)$

يغير الاتجاه

مثال 1 : لدينا الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

- أوجد حصرا لـ f على $[3 ; 5]$:

x	-1		1		3		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	4	↘	0	↗	20
	-16						

- f متزايدة تماما على المجال $[3 ; 5]$

$3 \leq x \leq 5$

$f(3) \leq f(x) \leq f(5)$

$0 \leq f(x) \leq 20$

- أوجد حصرا لـ f على $[1 ; 3]$:

- f متناقصة تماما على $[1 ; 3]$

$1 \leq x \leq 3$

$f(3) \leq f(x) \leq f(1)$

$0 \leq f(x) \leq 4$

- أوجد حصرا لـ f على $[-1 ; 5]$:

(f ليست رتيبة)

$-1 \leq x \leq 5$

أكبر صورة / أصغر صورة

$f(-1) \leq f(x) \leq f(5)$

$-16 \leq f(x) \leq 20$

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

* المناقشة بالوسيط m :

حل	حل	حل
موجب معلوم	سالب	

- في القيم الحدية نأخذ نقط التماس
حل مضاعف
- عند نقط التقاطع مع نفسها عدد الحلول
- لما : —— = f(x) حلول المعادلة بيانية هي فواصل نقط تقاطع C_f مع —— = y

---

يوجد 3 أنواع من المناقشات :

1) مناقشة أفقية :

* $f(x) = m$ (حاجة بدلالة m / لايوجد)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل.

أمثلة :

* $f(x) = \frac{1}{m}$ * $f(x) = m^2$
* $f(x) = e^m$ * $f(x) = |m|$
* $f(x) = \ln m$ * $f(x) = m$

2) مناقشة مماثلة :

* $f(x) = ax + m$ (m مكان b)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)

أمثلة :

* $f(x) = 2x + m$ * $f(x) = x - m$
* $f(x) = x + m + 1$

3) مناقشة دورانية :

* $f(x) = mx + b$ (m مكان a)

حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول النقطة (0 ; b)

أمثلة :

* $f(x) = 2m + 1$ * $f(x) = mx$

أمثلة : (المناقشة البيانية) (دورة)

$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2)$

لدينا : $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

يجب أن نجد $f(x)$ ونكتبها من الشكل $f(x) = \dots$

$x(x+1) - 2m(x+1) = 2\ln x$

$(x+1)(x-2m) = 2\ln x$

$x - 2m = \frac{2\ln x}{x+1}$

$\frac{1}{2}x - m = \frac{\ln x}{x+1}$ (÷ 2)

ومنه : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

مناقشة بيانية مماثلة لأن m مكان b : (C_f تتحرك على محور التراتيب)

* $m \in]-\infty, -\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[\Leftrightarrow -m =]-\infty, -\frac{1}{2}[$: خطين موجبين.
* $m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -m = -\frac{1}{2}$: حل مضاعف
* $m \in]-\frac{1}{2}, +\infty[\Leftrightarrow -m \in]-\infty, \frac{1}{2}[$: لا توجد حلول.

ملاحظة :

* لما $f(x) = m^2$ أو $f(x) = |m|$ هي مناقشة أفقية لكن تبدأ المناقشة من محور الفواصل نحو الأعلى

مثال 2 : (مناقشة بيانية أفقية)

$$(m-x)e^x + (x^2+3x+2) = 0$$

لدينا: $e^{-x} \times f(x) = -x + (x^2+3x+2)$

$$(m-x)e^x = -(x^2+3x+2)$$

$$m-x = -\frac{(x^2+3x+2)}{e^x}$$

$$m-x = -(x^2+3\frac{e^x}{e^x}+2)e^{-x}$$

$$m = x-(x^2+3x+2)e^{-x}$$

$$-m = -x+(x^2+3x+2)e^{-x}$$

$f(x) = -m = -y = m$

مناقشة بيانية أفقية :

المعادلة (C) $m \in]+\infty ; -0,38[$ $= y \in]-\infty ; 0,38[$

حل موجب

المعادلة (C) $m \in -0,38$ $= y \in [0,38]$

حل موجب و حل مضاعف

(C) $m \in]-2 ; -0,38[$ $= y \in]0,38 ; 2[$

للمعادلة حلان ~~موجبان~~ و سالبان

و حل موجب

المعادلة (C) $m \in -2$ $= y \in 2$

حل مضاعف

المعادلة (C) $m \in]-\infty ; -2[$ $= y \in]2 ; +\infty[$

حل سالب

مناقشة بيانية دورانية :

$$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

لدينا: $f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$$(2x-3|m|)x = -3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

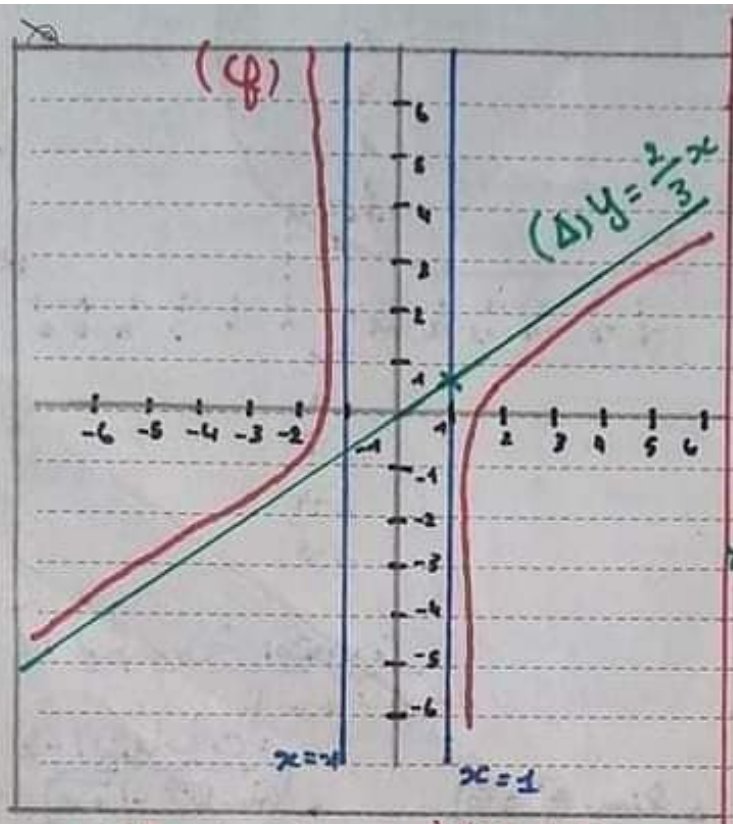
$$-3|m|x = -2x - 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$-\frac{1}{3}(-3|m|x) = -\frac{1}{3}\left(-2x - 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

$$|m|x = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

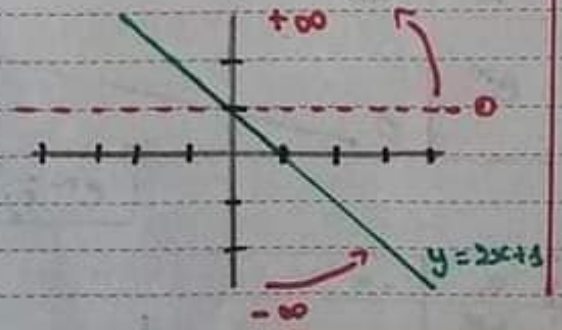
$f(x) = |m|x$

مناقشة بيانية دورانية تدور حول المبدأ $O(0,0)$ حسب نقط تقاطع المنحنيين (C_f) مع المستقيم و المعادلة $y = |m|x$



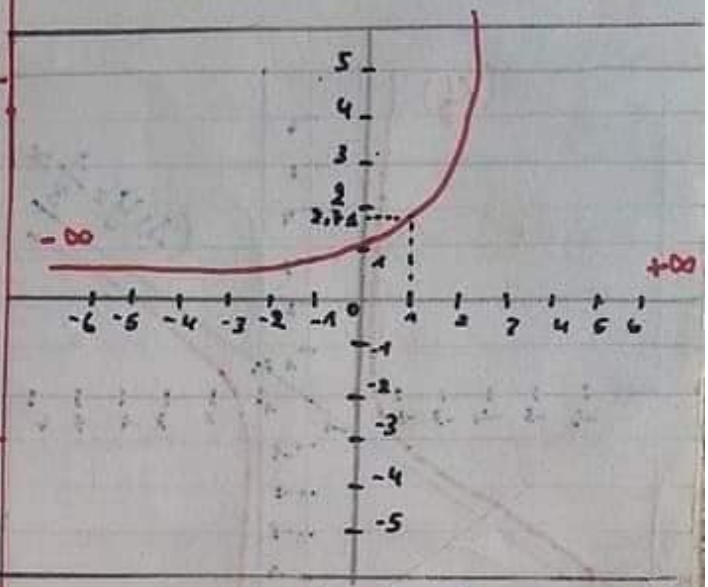
حسب نقط تقاطع المنحنيين (C_f) مع المستقيم و المعادلة $y = |m|x$:

* $|m| \in]-\infty ; \frac{2}{3}[$ يوجد حلين مختلفين في الإشارة
* $|m| < \frac{2}{3}$ أي $-\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$
* $m \in]-\frac{2}{3} ; \frac{2}{3}[$
* $|m| = \frac{2}{3}$ أي $m = \pm\frac{2}{3}$ لا توجد حلول
* $|m| \in]\frac{2}{3} ; +\infty[$ أي $|m| > \frac{2}{3}$
* $-\frac{2}{3} \geq m \geq \frac{2}{3}$ لا توجد حلول
* $m \in]-\infty ; -\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3} ; +\infty[$



www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

II - الدالة الأسية



1- مجموعة التعريف :

$]-\infty ; +\infty[$

2- النهايات :

* $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
* $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

فرع لقطع مكافئ محور الفواصل مقارب أفقي معادلته $y = 0$

3- المشتقة :

$f'(x) = e^x$ (هي نفسها)

4- إتجاه التغير + جدول التغيرات + إشارة e^x :

* إتجاه التغير :

e^x متزايدة تماما : $e^{+\infty} = +\infty$ / $e^{-\infty} = 0$

* جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	↗	$+\infty$

* إشارة e^x :

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		$+$	

5 - خواص الدالة الأسية :

* $e^0 = 1$; $e^1 = 2,718$

$(e^x)' = e^x$

* خواص القوى :

للتبسيط

* $e^{x+y} = e^x \times e^y$
* $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
* $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
* $(e^x)^y = e^{x \times y}$
* $e^0 = 1$
* $e^1 = 2,71$

$e^n > 0$

ملاحظة :

نستخدمهم لحل معادلة أو متراجحة :

* $e^a < e^b \Rightarrow a < b$
* $e^a > e^b \Rightarrow a > b$
* $e^a = e^b \Rightarrow a = b$

* المشتقة :

$(e^x)' = e^x$

$(e^{\text{حالة}})' = (\text{مشتقة الحالة}) \times e^{\text{الحالة}}$

مثال :

$(e^{2x})' = 2 \times e^{2x}$

* النهايات الشهيرة :

* $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
* $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$
* $\lim_{x \to -\infty} e^{kx} = 0$
* $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$
* $\lim_{x \to -\infty} x^k e^x = 0$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
* $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$
* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

أمثلة :

* $\lim_{x \to +\infty} (x^2+1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2+1)\frac{1}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$
* $\lim_{x \to -\infty} (x^2+1)e^x = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x + e^x = 0$

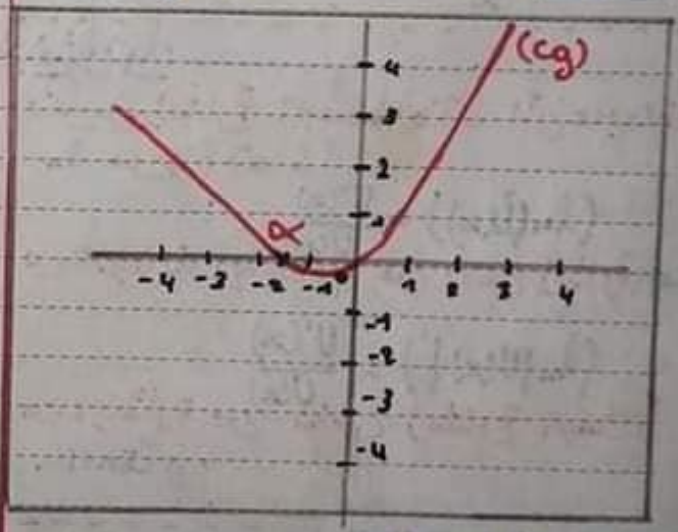
⚠ الدستور:

* حالات عدم التعيين:
* $e^{(\ )}$: النشر
* لما x أو e^x : العامل المشترك
* e^{-x} ( ) : لازم نبدل $e^x = \frac{1}{e^x}$ وننشر

* التعامل مع المشتقة:
* e^{-} ( ) : الداخل
* $ae^{-}+b$ ، من 2
* $ae^{2x}+be^{x}+c$: بالـ Δ

باب حول الدالة الأسية:

I- لدينا: $g(x) = 2e^x - x - 2$



تحديد حلول $g(x)=0$:
حلول المعادلة بيانيا هي فواصل نقط تقاطع (C_g) مع محور الفواصل

حساب $g(0)$:
* $g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

بين أن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\alpha \in]-1,6 ; -1,5[$
و مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-1,6 ; -1,5[$ من

التمثيل البياني:

* $g(-1,6) = 3,39 \times 10^{-2}$
* $g(-1,5) = -0,05$

$g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتفاسطة فإن $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على المجال $]-1,6 ; -1,5[$ $\alpha \in$

إشارة الدالة:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مثل 2 عكس 2 مثل 2

II- لدينا: $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$:

النهايات:

* $\lim_{x \to -\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = $ ح.ع.ت
$= \lim_{x \to -\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = 0$
* $\lim_{x \to +\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = $ ح.ع.ت
$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{xe^x}{e^{2x}} - \frac{e^x}{e^{2x}}\right)$
$= \lim_{x \to +\infty} e^{2x}\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) = +\infty$

أثبت أن: $f'(x) = e^x \times g(x)$:

* $f'(x) = 2e^x - [1 \times e^x (x+1)]$
$= e^x(2e^x - 1 - x - 1)$
$= e^x(2e^x - x - 2) = e^x \times g(x)$

إشارتها من نفس إشارة $g(x)$ $e^x > 0$

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

بين أن : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$:

نعوض لـ f مكان x نضع α أي :

$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^{\alpha}$

يستبدلان

$2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0$

$e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2}$ $\quad e^{2\alpha} = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2$

$* f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$

$= \frac{\alpha^2+4+4\alpha}{4} - \frac{\alpha^2+2\alpha+\alpha+2}{4}$

$= \frac{\alpha^2+4+4\alpha-2\alpha^2-4\alpha-2\alpha-4}{4}$

$= \frac{-\alpha^2-2\alpha}{4} = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$

وهو المطلوب.

حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$

$-1,6 < \alpha < -1,5$

$(-1,5)^2 < \alpha^2 < (-1,6)^2$ ×2 +

$2x-1,6 < 2\alpha < 2x-1,5$

$-0,95 < \alpha^2+2\alpha < -0,44$

$\frac{-0,95}{4} < \frac{\alpha^2+2\alpha}{4} < -0,11$

III - الدالة اللوغارتمية

1- مجموعة التعريف :

مابداخل $\ln(\ldots)$ أكبر تماما من 0

أي : $x > 0$ أي $\ln(x) \in]0;+\infty[$

أمثلة :

$f(x) = \ln(x+1)$	$f(x) = \ln(-x)$	$f(x) = \ln(x^2)$
$x+1 > 0$	$-x > 0$	$x^2 > 0$
$x > -1$	$x < 0$	$\mathbb{R}^*$
$]-1;+\infty[$	$]-\infty;0[$	

2- النهايات :

$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad \ln(+\infty) \neq +\infty$

$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ $\quad \ln(0) = -\infty$

* النهايات الشهيرة :

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^n}{x^n} = 0$

$\lim_{x \to 0} x\ln(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} x^n \ln(x^n) = 0$

* المشتقة :

$(\ln(\text{حاجة}))' = \frac{\text{مشتق الحاجة}}{\text{الحاجة}} = \frac{\text{مشتق داخل } \ln}{\text{داخل } \ln}$

أمثلة :

$* (\ln(x))' = \frac{1}{x}$ $\quad * (\ln(2x+1))' = \frac{2}{2x+1}$

3- إشارتها :

ندرس إشارة البسط فقط لأن مابداخل $\ln$ موجب تماما

$(\ln(U(x))) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

$\Rightarrow$ الإشارة من نفس إشارة البسط $U(x) > 0$

$(\ln|U(x)|) = \frac{U'(x)}{U(x)}$

$\Rightarrow$ الإشارة من نفس إشارة البسط والمقام.

مثال :

$* (\ln(x))' = \frac{1}{x}$

$f'(x) > 0$ إذن f متزايدة تماما

4- جدول التغيرات :

x	0	$+\infty$
$(\ln(x))'$	$\|$	$+$
$\ln(x)$	$\|-\infty$	$\nearrow +\infty$

5 - قواعد حساب ln :

* $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$
* $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
* $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$
* $\ln x^n = n \ln x$

---

* $f(x) = \ln x$ ← n زوجية ← $\ln(x)$
* $f(x) = \ln x$ ← n فردية ← $\ln(x)$

ملاحظات :

▲ الحاجة اللي في نص ln موجبة لكن ln(−) عندها إشارة.

إشارة $\ln x$ (خ):

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	−	0	+	

$\ln e^x = x$	$e^{\ln x} = x$	$\ln(1) = 0$

▲ لدراسة إشارة ln(−) نحل معادلة و متراجحة أكبر و متراجحة أصغر

▲ $\ln x$ متزايدة تماما تحفظ الترتيب :

* $\ln a = \ln b \iff a = b$
* $\ln a < \ln b \iff a < b$
* $\ln a > \ln b \iff a > b$

مثال :

لدينا : $f(x) = \ln(x+1)$ / $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

درس إشارة $f(x)$:

$\ln(x+1) < 0$	$\ln(x+1) > 0$	$\ln(x+1) = 0$
$x+1 < 1$	$x+1 > 1$	$x+1 = 1$
$x < 0$	$x > 0$	$x = 0$

$-1 < x < 0$

x	-1		0		$+\infty$
$\ln(x+1)$	‖	−	0	+	

باث حول الدالة اللوغاريتمية :

لدينا : دالة عددية معرفة على :
$f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln x$: ب $]0;2[\cup]2;+\infty[$

1) حساب النهايات :

* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{+\infty}$
* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{-\infty}$ ← م.م.ع $x=0$
* $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 2} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{-\infty}$
* $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 2} \frac{1}{x-2} + \ln x = \boxed{+\infty}$ ← م.م.ع $x=2$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وجدول تغيراتها :

المشتقة :

* $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + x^2 + 4 - 4x}{x(x-2)^2}$

$$= \boxed{\frac{x^2 - 5x + 4}{x(x-2)^2}}$$

إشارتها :

* $x(x-2)^2 > 0$
* $\Delta \iff x^2 - 5x + 4$

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$

* $x_1 = \frac{5-3}{2} = \boxed{1}$ * $x_2 = \frac{5+3}{2} = \boxed{4}$

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	

اتجاه التغير

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

* $f(x)$ متزايدة تماما على المجال:
$]0;1] \cup [4;+\infty[$

* $f(x)$ متناقصة تماما على المجال:
$[1;2[\cup]2;4]$

* جدول التغيرات:

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\|$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	$1,22$	↗	$+\infty$

3) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)-\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} + \ln x - \ln x$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

التفسير الهندسي:
$(C_{\ln})$ منحنى مقارب لـ $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$

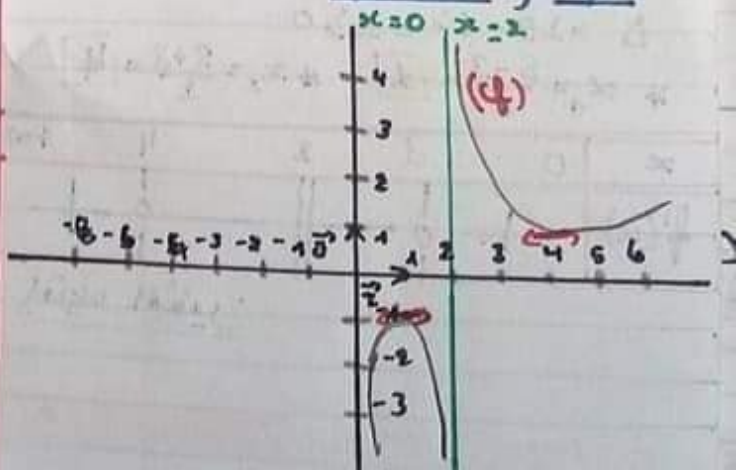
ب- دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$:

* إشارة الفرق:

$f(x)-\ln x = \frac{1}{x-2}$

x	0		2	$+\infty$
$f(x)-\ln x$	$\|$	$-$	$\|\|$	$+$
الوضعية	$(C_{\ln})$ أسفل $(\mathcal{C})$		$(C_{\ln})$ أعلى $(\mathcal{C})$	

4) رسم المنحنى:



II- لدينا الدالة المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};+\infty[$ بـ:

$g(x) = f(-2x)$

تعيين إتجاه تغير g:

* المشتقة:

$g'(x) = -2 \times f'(-2x)$

x	$-\infty$		-2		-1		$-0,5$		0
-2	$-$		$-$		$-$		$-$		
$f'(-2x)$	$+$	$\|$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

* $g(x)$ متزايدة تماما على المجال:
$[-2;-1] \cup [-1;\frac{1}{2}[$

* $g(x)$ متناقصة تماما على المجال:
$]-\infty;-2] \cup [0;\frac{1}{2}[$

* جدول التغيرات:

$f'(x)=0$
$f'(-2x)=0$
$f'(x)<0$
$f'(-2x)<0$

$x=1$
$-2x=1$
$x=-\frac{1}{2}$
$-1<x<2$
$-1<-2x<2$
$-1<x<-\frac{1}{2}$

$x=4$
$-2x=4$
$x=-2$
$2<x<4$
$2<-2x<4$
$-2<x<-1$

x	$-\infty$		-2		-1		$-\frac{1}{2}$		0
$g(x)$	$+\infty$ ↘		$1,22$	↗	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

LOGARITHM

IV- ملاحظات على الدوال (حالات خاصة)

1- الدوال المركبة:

ملاحظة:

الدوال المركبة تدرس وهي مركبة.

(مشتق الداخل) × (مشتق البرا)(يقعد)

1- دراسة مثال (1):

لدينا جدول التغيرات:

x	1	2	+∞
f'(x)	+	0	−
f(x)	↗	5	↘
	-∞		0

استنتج إتجاه تغير الدالة $g(x)=e^{f(x)}$

على المجال $Dg:]1;+\infty[$

* المشتقة:

$$* g'(x) = f'(x) \times e^{f(x)}$$

* إشارتها:

$e^{f(x)} > 0$ إشارتها من نفس إشارة $f'(x)$

(لحساب الصور نعوض صور الدالة السابقة في الدالة الجديدة)

x	1	2	+∞
g'(x)	+	0	−
g(x)	↗	e^5	↘
	0		0

(لحساب النهايات نعوض نهايات الدالة السابقة في الدالة الجديدة)

* $\lim_{x \to 1} e^{f(x)} = e^0 = 1$ * $\lim_{x \to +\infty} e^{f(x)} = e^{+\infty} = +\infty$

إستنتج إذن إتجاه تغير الدالة $g(x)=f(e^x)$

على المجال $Dg:]0;+\infty[$

* المشتقة:

$$* g'(x) = e^x \times f'(e^x)$$

* إشارتها:

$f'(e^x)$ إشارتها من نفس إشارة $e^x > 0$

$f'(x)=0$	$x=2$	$x>2$
$f'(e^x)=0$	$e^x=2$	$e^x>2$
$f'(x)<0$	$e^x=2$	$x>\ln 2$
$f'(e^x)<0$	$\ln e^x = \ln 2$	
$f'(e^x)<0$	$x=\ln 2$	

(عند مشواجة أصغر أو أكبر نأخذ الصور نعوضها بـ x ثم نصل إلى الدالة المطلوبة)

x	0	ln2	+∞
g'(x)	+	0	−
g(x)	↗	5	↘
	-∞		0

$$* g(\ln 2) = f(e^{\ln 2}) = f(2) = 5$$

- دراسة مثال (2):

- لدينا جدول التغيرات:

x	-∞	0	1	2	+∞
f'(x)	+	0	−	0	+
f(x)	0 ↗	e^2	↘ 0	↗	+∞

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

استنتاج إتجاه تغير $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ على المجال $]-\infty;2[$

* المشتقة: $g'(x)=\frac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$

* إشارتها: $[f(x)]^2>0$ إشارتها عكس إشارة $f'(x)$ (من المبسط)

x	$-\infty$		0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↗	e^{-2}	↗	e^{-1}	↘	0

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)}=+\infty$ / * $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{f(x)}=0$

* $g(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$

* $g(1)=\frac{1}{f(1)}=\frac{1}{e}=e^{-1}$

إستنتج إذن إتجاه تغير الدالة $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ على المجال $]-\infty;0[$:

* المشتقة: $g'(x)=\frac{-1}{x^2}\times f'\left(\frac{1}{x}\right)$

* إشارتها:

$f'(x)=0$	$x=0$	$x=1$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)=0$	$\frac{1}{x}=0$	$\frac{1}{x}=1$
$f'(x)<0$	(لا تقبل حل)	$x=1$
$f'\left(\frac{1}{x}\right)<0$		$0<x<1$
		$0<\frac{1}{x}<1$
		$x>1$ / $\frac{1}{x}<1$

x	$-\infty$		0
$-\frac{1}{x^2}$	$-$		
$f'\left(\frac{1}{x}\right)$	$+$		
$g'(x)$	$-$		
$g(x)$	e^2	↘	0

إستنتاج إتجاه تغير $g(x)=[f(x)]^2$ على المجال $]-\infty;2[$:

* المشتقة: $g'(x)=2f(x)^{2-1}\times f'(x)$

* إشارتها: $2>0$

x	$-\infty$		0		1		2
$f(x)$	$+$		$+$		$+$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g(x)$	0	↗	e^4	↘	e^2	↗	$+\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]^2=0$ * $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]^2=+\infty$

* $g(0)=[f(0)]^2=(e^2)^2=e^4$

* $g(1)=[f(1)]^2=e^2$

إستنتج إتجاه تغير $g(x)=f(x^2)$ على $]-\infty;\sqrt{2}[$

* المشتقة: $g'(x)=2x\times f'(x^2)$

* إشارتها:

$f(x)=0$	$x=0$	$x=1$
$f'(x^2)=0$	$x^2=0$	$x^2=1$
$f'(x)<0$	$x=0$	$x=-1$ ou $x=1$
$f'(x^2)<0$	$0<x<1$	$x^2<1$
	$0<x^2<1$	$-1<x<1$

x	$-\sqrt{2}$		-1		0		1		$\sqrt{2}$
$2x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$f'(x^2)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$g(x)$	$+\infty$	↘	e	↗	e^2	↘	e	↗	$+\infty$

2- طريقة نزع القيمة المطلقة:

صد حفلة:

① ندرس إشارة ما بداخل القيمة المطلقة.

② + تخرج كيما هي

− تخرج معدومة هي العاب

مثال:

ليكن الدالة $K(x)=\frac{|x|}{|x+1|}$ معرفة على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		−		−	0	+	
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x	
$x+1$		−	0	+		+	
$\lvert x+1\rvert$		$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$	
$K(x)$		$\frac{-x}{-x-1}$	‖	$\frac{-x}{x+1}$	0	$\frac{x}{x+1}$	

$$K(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1} & x\in]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[\\ \frac{-x}{x+1} & x\in]-1;0[\end{cases}$$

* دراسة قابلية الإشتقاق:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-x}{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x+1}\times\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x+1}=\boxed{-1}$$

1- تقبل الإشتقاق على اليسار

تذكير:

الإشتقاقية: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$: عدد ولا $\pm\infty$

الإستمرارية: $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$$*\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}\times\frac{1}{x}=\boxed{1}$$

1 الدالة تقبل الإشتقاق على اليمين

$1\neq -1$

الدالة غير قابلة للإشتقاق عند 0

$$*\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{x+1}=0$$

K مستمرة عند 0.

ملاحظات:

$x^2=a \longrightarrow x=\sqrt{a}\ \ x=-\sqrt{a}$

$x^2<a \longrightarrow -\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$

$x^2>a \longrightarrow x>\sqrt{a}\ \ x<-\sqrt{a}$

$|m|=a \longrightarrow m=a\ \ m=-a$

$|m|<a \longrightarrow -a<m<a$

$|m|>a \longrightarrow m>a\ \ m<-a$

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

$$*\lim_{x\to-\infty}e^{x\ln a}=\boxed{+\infty}\qquad *\lim_{x\to-\infty}e^{x\ln a}=\boxed{0}$$

$$*\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln a}=\boxed{0}\qquad *\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln a}=\boxed{+\infty}$$

www.caar.dz La CAAR, la confiance en commun

IV- استنتاج تمثيلات البيانية

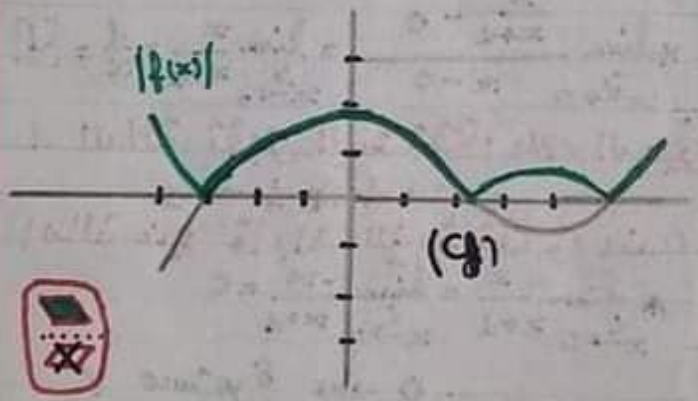
أ- $g(x) = |f(x)|$:

$f(x) \geq 0$ ⟵ $f(x)$

$f(x) < 0$ ⟵ $-f(x)$

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \\ -f(x) & \end{cases}$$

$C_{|f|}$ ينطبق على جزء C_f الواقع فوق محور الفواصل ونرسم نظير جزء C_f الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل.



ب- $g(x) = f(|x|)$:

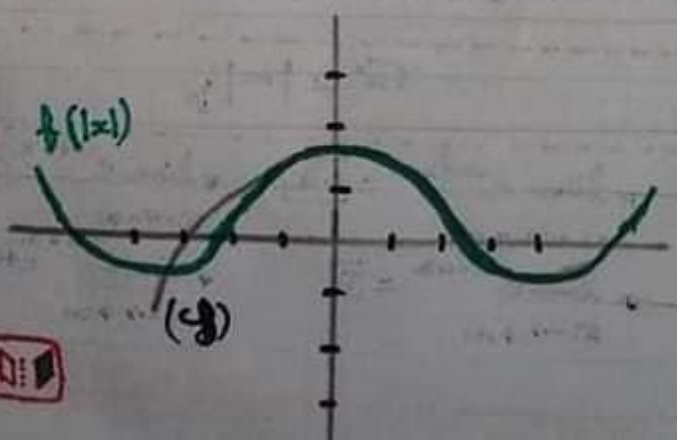
$x \geq 0$ ⟵ $f(x)$

$x \leq 0$ ⟵ $-f(x)$

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \\ -f(x) & \end{cases}$$

$f(|x|)$ هي دالة زوجية.

$C_{f(|x|)}$ ينطبق على C_f من أجل : $x \in [0; +\infty[$ نكمل الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب (لأنها زوجية)

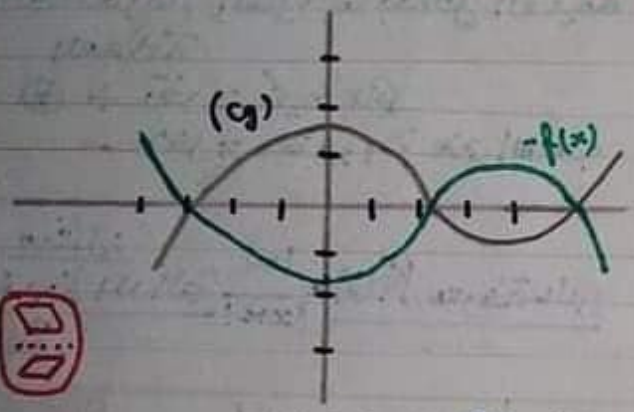


ملاحظة:

لما $g(x) = f(|x|)$ ينطبق عليه من أجل : $x \in]-\infty; 0]$ (أي العكس)

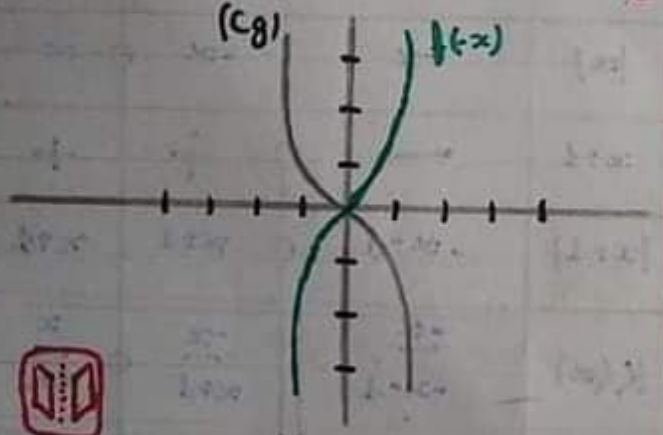
أ- $g(x) = -f(x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل



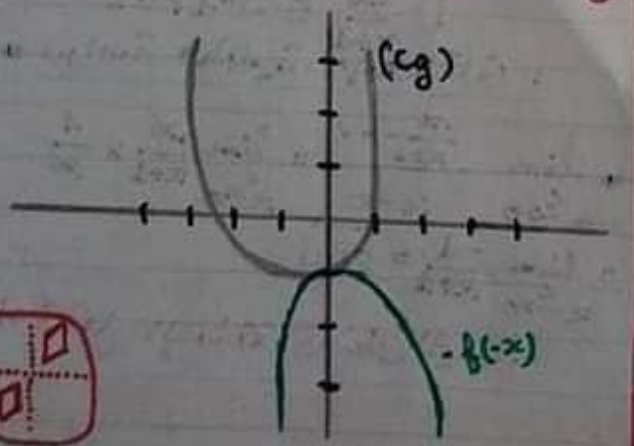
ب- $g(x) = f(-x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



ج- $g(x) = -f(-x)$:

C_g نظير C_f بالنسبة للمبدأ.



مثال (1):

أحسب: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 + \sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$x^2 - 1 \leq x^2 + \sin x \leq x^2 + 1$

$x^2 \leq x^2 + 1 + \sin x \leq x^2 + 2$

$x^2 \leq f(x) \leq x^2 + 2$

ومنه $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ { $f(x) \geq x^2$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

مثال (2):

أحسب: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{\cos x}{x^2}$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

نضرب في $\frac{1}{x^2}$:

$\frac{-1}{x^2} \leq \frac{\cos x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$

$1 - \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{\cos x}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{x^2}$

$1 - \frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$ / $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$

ومنه: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$

$0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

أحسب: $\lim V_n - U_n$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$

ومنه: حسب النهايات بالمقارنة نجد:

$\lim\limits_{x \to +\infty} V_n - U_n = 0$

تغيرات الدالة: $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$ معرفة على $]-\infty; +\infty[$

* المشتقة: $f'(x) = e^x - \frac{2x}{2} = e^x - x$

(لا نستطيع دراسة الإشارة)

* المشتقة $f''(x)$:

$f''(x) = e^x - 1$

$e^x = 1$

$x = \ln 1$

$x = 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		−	0	+	

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		+	
$f'(x)$	1	↗	

$f'(x) > 0$ / $f'(x) > 1$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	1	↗	

$f(x) > 0$ / $f(x) > 1$

$e^x - \frac{x^2}{2} > 0$

$e^x > \frac{x^2}{2}$

$\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ } $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

(حسب النهايات بالمقارنة)