Zrafi Karim

# Serie N°12

4ème sc.T
2020/2021

## Exercice N°1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ .

**1) a)** Calculer $(1+2i)^2=-3+4i$

**b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-z+1-i=0$

**2)** Soit $\alpha$ un réel et on désigne par (E') l'équation : $z^2-(1+2\cos\alpha)z+1+e^{-i\alpha}=0$

**a)** Vérifier que $e^{-i\alpha}$ est une solution de (E').

**b)** Déduire l'autre solution de (E ').

**3)** Soient A et B deux points d'affixes respectives : $z_A=e^{-i\alpha}$ et $z_B=1+e^{i\alpha}$, avec $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

**a)** Montrer que $z_B=2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

**b)** Déterminer alors $\alpha$ pour que le triangle OAB soit rectangle en O.

**4)** Soit C le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

**a)** Vérifier $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}=-2i\sin(\alpha)$.

**b)** Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.

**c)** Déterminer $\alpha$ pour que ACBD soit un carré.

## Exercice N°2

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f définie et deux fois dérivables sur IR.

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $4$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | + | |
| f'(x) | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-3$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

**1)** Montrer que l'équation f '(x) = 0 admet une unique solution $\beta$ dans IR.

**2)** Déterminer le signe de f '(x) pour tout x ∊ IR et dresser le tableau de variation de f.

**3)** Déduire que f admet un extremum en un réel $x_0$ que l'on précisera.

**4)** Soit h la restriction de f sur ]-∞ ; 4].Montrer que h réalise une bijection sur ]-∞ ; 4].

**5)** Montrer que $C_f$ admet deux points d'inflexions respectivement en $x_1$ et $x_2$ que l'on précisera.

## Exercice N°3

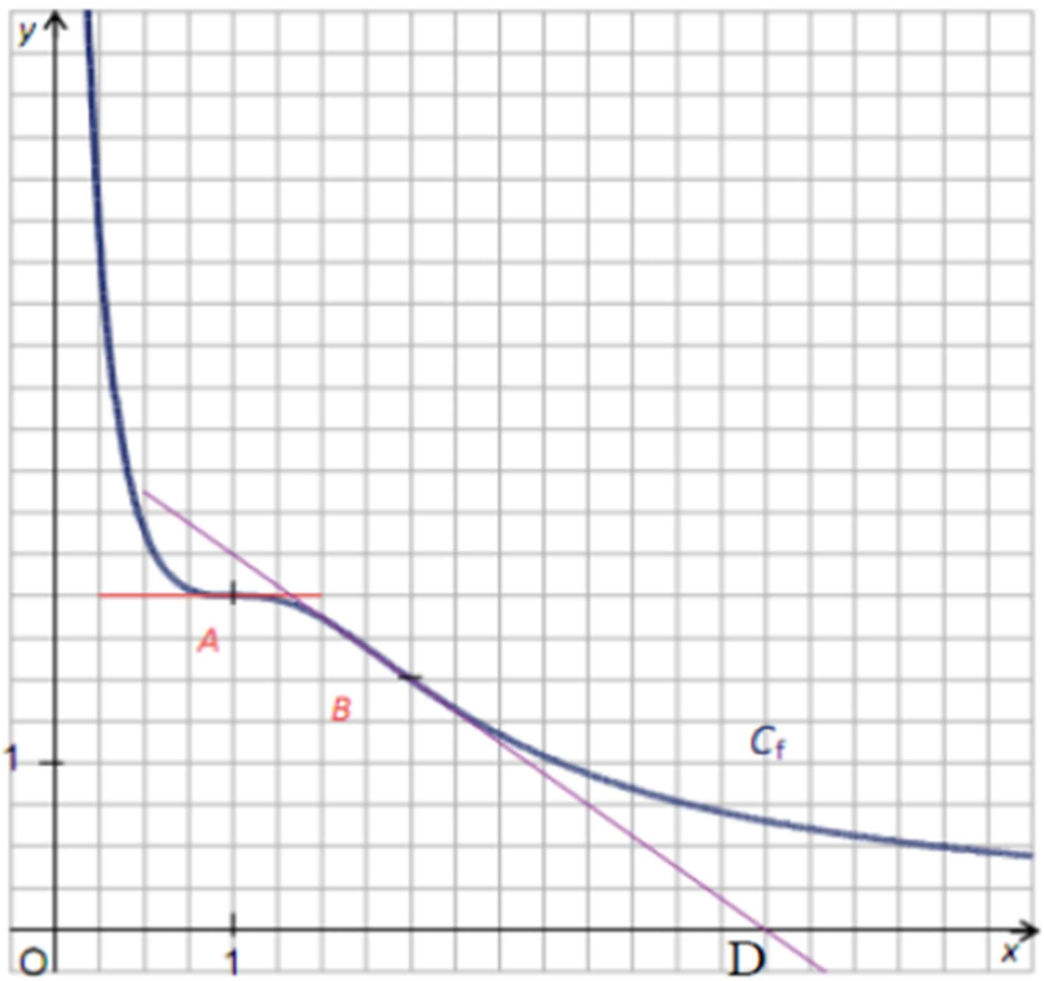
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct$(O;\vec{i},\vec{j})$.

Dans le graphique ci-dessous $C_f$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable et décroissante Sur $]0,+\infty[$

- La droite d'équation : x= 0 est une asymptote verticale à $C_f$ .
- La droite d'équation : y = 0 est une asymptote horizontale à $C_f$ au voisinage de + ∞.
- $C_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. La tangente à la courbe $C_f$ au point B( 2 , $\frac{3}{2}$ ) passe par le point D(4 , 0)

Par lecture graphiques :

1) Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, f '(1) , f '(2) et f ''(2).
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$, montrer que g est une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .
4) $g^{-1}$ est –elle dérivable à gauche en 2. Justifier.
5) Vérifier que $g^{-1}$ est dérivable en $\frac{3}{2}$ et calculer$(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.
6) Construire (C) la courbe de $g^{-1}$ sur le même repère.



## Exercice N°1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

**1) a)** Calculer $(1+2i)^2 = -3+4i$

$(1+2i)^2 = 1+4i-4 = -3+4i$

**b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1-i) = -3+4i = (1+2i)^2 \Rightarrow \delta = 1+2i$

$z' = \dfrac{1-1-2i}{2} = -i$

$z'' = \dfrac{1+1+2i}{2} = 1+i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-i\,;\,1+i\}$

**2)** Soit $\alpha$ un réel et on désigne par (E') l'équation : $z^2 - (1+2\cos\alpha)z + 1 + e^{-i\alpha} = 0$

**a)** Vérifier que $e^{-i\alpha}$ est une solution de (E').

$\boxed{2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}$

$(e^{-i\alpha})^2 - (1+e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})(e^{-i\alpha}) + 1 + e^{-i\alpha}$

$= \cancel{e^{-i2\alpha}} - e^{-i\alpha} - e^{i0} - \cancel{e^{-i2\alpha}} + 1 + \cancel{e^{-i\alpha}} = 0$

D'où $z_1 = e^{-i\alpha}$ est une solution de (E')

**b)** Déduire l'autre solution de (E ').

$z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow e^{-i\alpha}\cdot z_2 = 1+e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{1+e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}}$

$\Leftrightarrow z_2 = (1+e^{-i\alpha})e^{i\alpha} = e^{i\alpha} + 1$

**3)** Soient A et B deux points d'affixes respectives : $z_A = e^{-i\alpha}$ et $z_B = 1 + e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

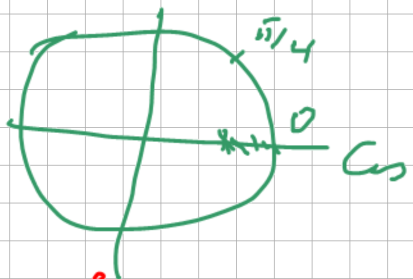
**a)** Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

$2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\alpha} + e^{i0} = 1+e^{i\alpha} = z_B$

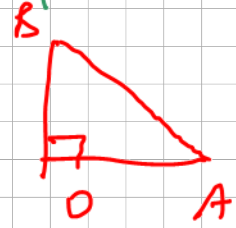
$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2\cos(\alpha/2)\, e^{i\alpha/2}}{e^{-i\alpha}} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\right)} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{3\alpha}{2}}$$

car $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in [0; \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$

Donc $\boxed{\frac{z_B}{z_A} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{3\alpha}{2}}}$




**b)** Déterminer alors $\alpha$ pour que le triangle OAB soit rectangle en O.




OAB rectangle en O $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} \in i\mathbb{R}$

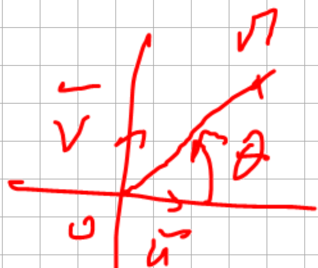
$\Leftrightarrow \frac{z_B}{z_A} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{3\alpha}{2}} \in i\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

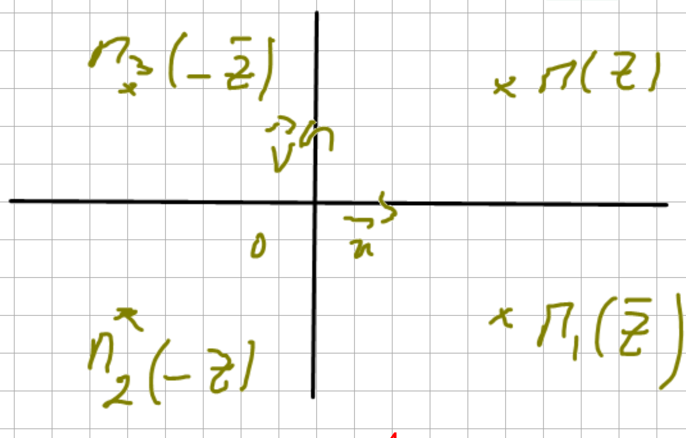
$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

or $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$




$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Rq}} : re^{ix} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z} \\ re^{ix} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = k\pi \; ; k \in \mathbb{Z} \end{array}}$

$M_3 = S_{(O,\vec{v})}(M)$




$M_1 = S_{(O,\vec{u})}(M)$

$M_2 = S_O(M)$

**4)** Soit C le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

**a)** Vérifier $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin(\alpha)$.

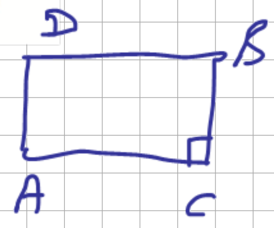
$$C = S_{(O,\vec{u})}(A) \Leftrightarrow z_C = \bar{z}_A = \overline{e^{-i\alpha}} = e^{i\alpha}$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha} - e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}$$

$$= -(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = -2i\sin(\alpha)$$

$$\boxed{e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x}$$

**b)** Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.




ACBD un # $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow z_D - z_A = z_B - z_C$

$\Leftrightarrow z_D = z_A + z_B - z_C$

$\Leftrightarrow z_D = e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \Leftrightarrow \boxed{z_D = 1 + e^{-i\alpha} = \bar{z}_B}$

or $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin\alpha \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

D'où ACBD un rectangle.

**c)** Déterminer $\alpha$ pour que ACBD soit un carré.

on a : ACBD un rectangle, pour qu'il soit un carré, il suffit que $AC = CB \Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |-2i\sin\alpha| = 1 \Leftrightarrow 2\sin\alpha = 1$ car $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

## Exercice N°2

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f définie et deux fois dérivables sur IR.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $4$ | | $5$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | | | $+$ | |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $-3$ | | | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**1)** Montrer que l'équation f '(x) = 0 admet une unique solution β dans IR.

* $f'$ est cont et st ↗ sur $]-\infty,-1[$ et $f(]-\infty,-1[) = ]-\infty,-1[$
or $0 \notin ]-\infty,-1[$ donc $f'(x)=0$ n'a pas de sol sur $]-\infty,-1[$
* $f'$ est cont et st ↘ sur $[-1;4]$ et $f([-1,4]) = [-3,-1]$
or $0 \notin [-3;-1]$ donc $f'(x)$ n'a pas de sol sur $[-1,4]$
* $f'$ est cont et st ↗ sur $]4,+\infty[$ et $f(]4,+\infty[) = ]-3,+\infty[$
or $0 \in ]-3;+\infty[$ donc il existe un seul $\beta \in ]4,+\infty[$
tq $f'(\beta) = 0$
D'où $f'(x) = 0$ admet une seule sol $\beta \in IR$.

**2)** Déterminer le signe de f '(x) pour tout x ∈ IR et dresser le tableau de variation de f.

| $x$ | $-\infty$ | | $4$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | | | | ↗ | |

**3)** Déduire que f admet un extremum en un réel $x_0$ que l'on précisera.

On a $f'(x)$ s'annule en $\beta$ en changeant de signe
donc f admet un minimum absolu en $\beta$
de valeur $f(\beta)$.

**4)** Soit h la restriction de f sur ]-∞ ; 4].Montrer que h réalise une bijection sur ]-∞ ; 4].

h est continue et st décroissante sur ]-∞; 4] donc elle réalise une bijection sur ]-∞, 4]

**5)** Montrer que $C_f$ admet deux points d'inflexions respectivement en $x_1$ et $x_2$ que l'on précisera.

on a : $f''(x)$ s'annule en -1 et en 4 , en changeant de signe

Donc $\mathscr{C}_f$ admet 2 pts d'inflexions $(-1; f(-1)) ; (4; f(4))$

## Exercice N°3

Par lecture graphiques :

1) Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ , $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, f '(1) , f '(2) et f ''(2).

* $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$ car $x = 0$ est A.V. à $\mathscr{C}_f$

* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ car $y = 0$ est A.H à $\mathscr{C}_f$ au v$(+\infty)$

* $f'(1) = 0$ car $\mathscr{C}_f$ admet en 1 une tg H.

* $f'(2) = \dfrac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \dfrac{\frac{3}{2} - 0}{2-4} = -\dfrac{3}{4}$.

* $f''(2) = 0$ car B est un pt d'inflexion pour $\mathscr{C}_f$ .

2) Dresser le tableau de variation de f.

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 2 | ↘ | 0 |

3) Soit g la restriction de f sur [1, +∞[, montrer que g est une bijection de [1, +∞[ sur un intervalle J que l'on précisera .

g est cont et st ↘ sur [1, +∞[ donc elle réalise une bijection de [1, +∞[ sur $g([1;+\infty[) = ]0 ; 2]$

4) $g^{-1}$ est –elle dérivable à gauche en 2. Justifier.

on a : $g(1)=2 \iff g^{-1}(2)=1$.

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $2$ | $0$ |

on a $g$ est dérivable à droite en 1

et $g'_d(1)=0$ donc $\mathcal{C}_g$ admet une demi-tgte Horizontale au point $(1,2)$

D'où $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ admet une demi-tgte verticale au point $(2,1)$

Donc $g^{-1}$ n'est pas dérivable à droite en 2

5) Vérifier que $g^{-1}$ est dérivable en $\frac{3}{2}$ et calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.

on a : $g(2)=\frac{3}{2} \iff g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)=2$.

Th : si $g$ est dérivable en $a$ et $g'(a)\neq 0$ alors $g^{-1}$ est dérivable en $b=g(a)$ et on a : $(g^{-1})'(b)=\dfrac{1}{g'(g^{-1}(b))}=\dfrac{1}{g'(a)}$

on a $g$ est dérivable en 2 et $g'(2)=-\frac{3}{4}\neq 0$

D'où $g^{-1}$ est dérivable en $\frac{3}{2}$ et

$$(g^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{g'(2)}=\frac{1}{-\frac{3}{4}}=-\frac{4}{3}.$$

6) Construire (C) la courbe de $g^{-1}$ sur le même repère.