Serie N°12

Exercice N°1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

1) a) Calculer $(1+2i)^2 = -3+4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - z + 1 - i = 0$

2) Soit α un réel et on désigne par (E') l'équation : $z^2 - (1+2\cos\alpha)z + 1 + e^{-i\alpha} = 0$

a) Vérifier que $e^{-i\alpha}$ est une solution de (E').

b) Déduire l'autre solution de (E ').

3) Soient A et B deux points d'affixes respectives : $z_A = c^{-i\alpha}$ et $z_B = 1 + c^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

b) Déterminer alors α pour que le triangle OAB soit rectangle en O.

4) Soit C le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

a) Vérifier $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin(\alpha)$.

b) Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.

c) Déterminer α pour que ACBD soit un carré.

Exercice N°2

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f définie et deux fois dérivables sur IR.

x	$-\infty$		-1		4		5		$+\infty$
f"(x)		+	0	−	0	+	0	+	
f'(x)	$-\infty$	↗	-1	↘	-3	↗		↗	$+\infty$

1) Montrer que l'équation f '(x) = 0 admet une unique solution β dans IR.

2) Déterminer le signe de f '(x) pour tout x ∈ IR et dresser le tableau de variation de f.

3) Déduire que f admet un extremum en un réel x_0 que l'on précisera.

4) Soit h la restriction de f sur]-∞ ; 4].Montrer que h réalise une bijection sur]-∞ ; 4].

5) Montrer que C_f admet deux points d'inflexions respectivement en x_1 et x_2 que l'on précisera.

Exercice N°3

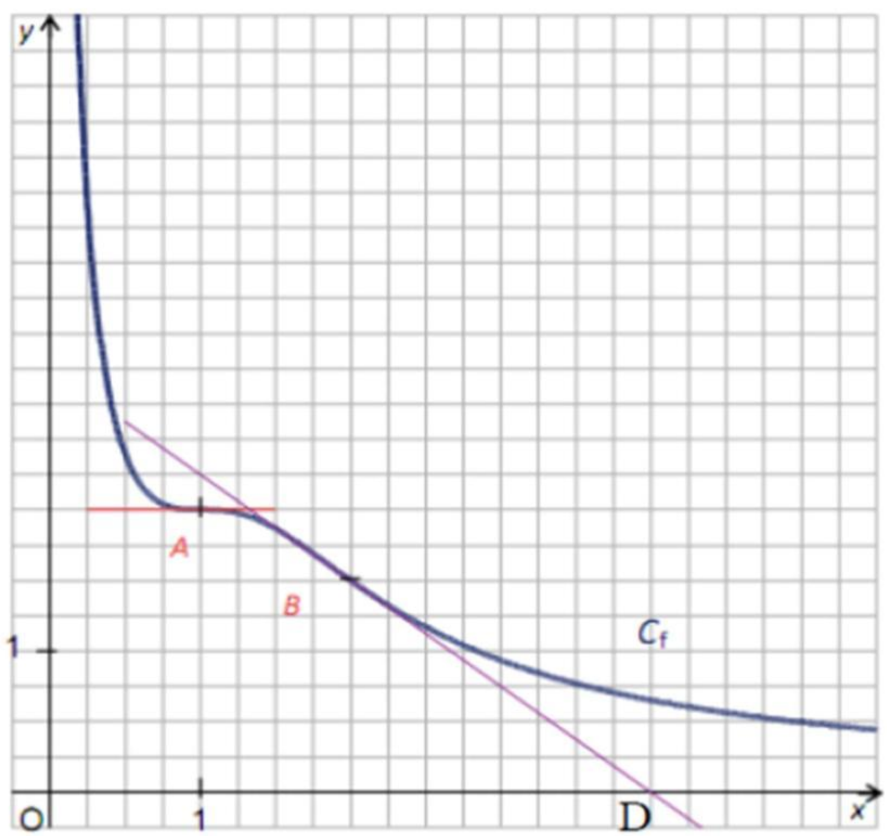
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Dans le graphique ci-dessous C_f est la courbe représentative d'une fonction f dérivable et décroissante Sur $]0,+\infty[$

- La droite d'équation : x= 0 est une asymptote verticale à C_f .
- La droite d'équation : y = 0 est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de + ∞.
- C_f admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1. La tangente à la courbe C_f au point B(2 , $\frac{3}{2}$) passe par le point D(4 , 0)

Par lecture graphiques :

1) Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, f '(1) , f '(2) et f ''(2).
2) Dresser le tableau de variation de f.
3) Soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$, montrer que g est une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .
4) g^{-1} **est –elle dérivable à gauche en 2. Justifier.**
5) Vérifier que g^{-1} **est dérivable en** $\frac{3}{2}$ et calculer$(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.
6) Construire (C) la courbe de g^{-1} sur le même repère.



Exercice N°1

Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(0; \vec{u}, \vec{v})$.

1) a) Calculer $(1+2i)^2 = -3+4i$

$(1+2i)^2 = 1+4i-4 = -3+4i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - z + 1 - i = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(1-i) = -3+4i = (1+2i)^2 \Rightarrow \delta = 1+2i$

$z' = \dfrac{1-1-2i}{2} = -i$

$z'' = \dfrac{1+1+2i}{2} = 1+i$

$S_{\mathbb{C}} = \{-i\,;\,1+i\}$

2) Soit α un réel et on désigne par (E') l'équation : $z^2 - (1+2\cos\alpha)z + 1 + e^{-i\alpha} = 0$

a) Vérifier que $e^{-i\alpha}$ est une solution de (E').

$\boxed{2\cos\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}$

$(e^{-i\alpha})^2 - (1+e^{i\alpha}+e^{-i\alpha})(e^{-i\alpha}) + 1 + e^{-i\alpha}$

$= \cancel{e^{-i2\alpha}} - \cancel{e^{-i\alpha}} - e^{i0} - \cancel{e^{-i2\alpha}} + 1 + \cancel{e^{-i\alpha}} = 0$

D'où $z_1 = e^{-i\alpha}$ est une solution de (E')

b) Déduire l'autre solution de (E ').

$z_1 \times z_2 = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow e^{-i\alpha} \cdot z_2 = 1 + e^{-i\alpha} \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{1+e^{-i\alpha}}{e^{-i\alpha}}$

$\Leftrightarrow z_2 = (1+e^{-i\alpha})\,e^{i\alpha} = e^{i\alpha} + 1$

3) Soient A et B deux points d'affixes respectives : $z_A = e^{-i\alpha}$ et $z_B = 1 + e^{i\alpha}$, avec $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

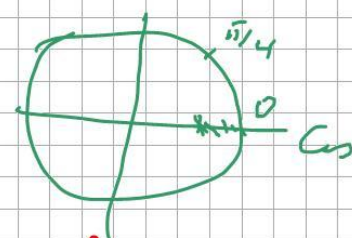
a) Montrer que $z_B = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ puis déduire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

$2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}} = \left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right) \cdot e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\alpha} + e^{i0} = 1 + e^{i\alpha} = z_B$

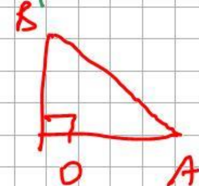
$$\frac{z_B}{z_A} = \frac{2\cos(\alpha/2)\, e^{i\alpha/2}}{e^{-i\alpha}} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\right)} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{3\alpha}{2}}$$

Car $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$

Donc $\boxed{\frac{z_B}{z_A} = 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{3\alpha}{2}}}$



b) Déterminer alors α pour que le triangle OAB soit rectangle en O.



OAB rectangle en O $\iff \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$

$\iff \frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} \in i\mathbb{R}$

$\iff \frac{z_B}{z_A} \in i\mathbb{R}$

$\iff 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{3\alpha}{2}} \in i\mathbb{R}$

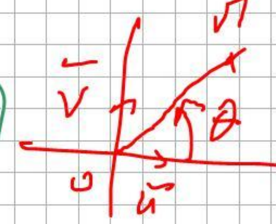
$\iff \frac{3\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\iff \alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

or $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{3}}$

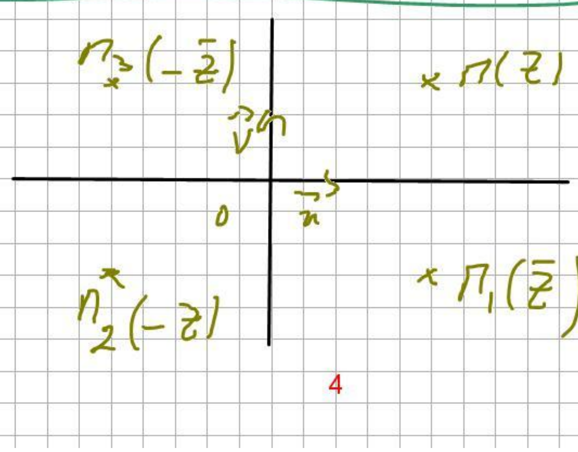
Rq : $r e^{ix} \in i\mathbb{R} \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$

$r e^{ix} \in \mathbb{R} \iff x = k\pi \; ; k \in \mathbb{Z}$



$M_3 = S_{(O,\vec{v})}(M)$

$M_2 = S_O(M)$



$M_1 = S_{(O,\vec{u})}(M)$

4) Soit C le symétrique du point A par rapport à l'axe des abscisses.

a) Vérifier $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin(\alpha)$.

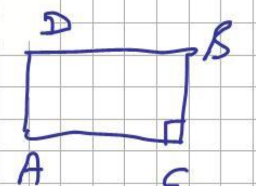
$C = S_{(O,\vec{u})}(A) \Rightarrow z_C = \overline{z_A} = \overline{e^{-i\alpha}} = e^{i\alpha}$

$\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}}{1 + e^{i\alpha} - e^{i\alpha}} = e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}$

$= -(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) = -2i\sin(\alpha)$

$\boxed{e^{ix} - e^{-ix} = 2i\sin x}$

b) Déduire l'affixe du point D pour que le quadrilatère ACBD soit un rectangle.



ACBD un # $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$

$\Leftrightarrow z_D - z_A = z_B - z_C$

$\Leftrightarrow z_D = z_A + z_B - z_C$

$\Leftrightarrow z_D = e^{-i\alpha} + 1 + e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \Leftrightarrow \boxed{z_D = 1 + e^{-i\alpha} = z_B}$

or $\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}} = -2i\sin\alpha \in i\mathbb{R} \Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$

D'où ACBD un rectangle.

c) Déterminer α pour que ACBD soit un carré.

on a: ACBD un rectangle, pour qu'il soit un carré, il suffit que $AC = CB \Leftrightarrow \frac{CA}{CB} = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_{\overrightarrow{CA}}}{z_{\overrightarrow{CB}}}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |-2i\sin\alpha| = 1 \Leftrightarrow 2\sin\alpha = 1$ car $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$

Exercice N°2

Le tableau ci-dessous est celui d'une fonction f définie et deux fois dérivables sur IR.

x	$-\infty$		-1		4		5		β		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0			$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$			0	$\nearrow$	$+\infty$

1) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution β dans IR.

* f' est cont et st $\nearrow$ sur $]-\infty, -1[$ et $f'(]-\infty,-1[) =]-\infty,-1[$

or $0 \notin]-\infty,-1[$ donc $f'(x) = 0$ n'a pas de sol sur $]-\infty,-1[$

* f' est cont et st $\searrow$ sur $[-1\,;4]$ et $f'([-1,4]) = [-3,-1]$

or $0 \notin [-3\,;-1]$ donc $f'(x)$ n'a pas de sol sur $[-1,4]$

* f' est cont et st $\nearrow$ sur $]4,+\infty[$ et $f'(]4,+\infty[) =]-3,+\infty[$

or $0 \in]-3\,;+\infty[$ donc il existe un seul $\beta \in]4,+\infty[$ tq $f'(\beta) = 0$

D'où $f'(x) = 0$ admet une seule sol $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Déterminer le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in$ IR et dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		4		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$				$\nearrow$	

3) Déduire que f admet un extremum en un réel x_0 que l'on précisera.

on a $f'(x)$ s'annule en β en changeant de signe donc f admet un minimum absolu en β de valeur $f(\beta)$.

4) Soit h la restriction de f sur]-∞ ; 4].Montrer que h réalise une bijection sur]-∞ ; 4].

h est continue et est décroissante sur]-∞; 4] donc elle réalise une bijection sur]-∞, 4]

5) Montrer que C_f admet deux points d'inflexions respectivement en x_1 et x_2 que l'on précisera.

on a : $f''(x)$ s'annule en -1 et en 4, en changeant de signe

Donc $\mathcal{C}_f$ admet 2 pts d'inflexions $(-1; f(-1))$; $(4; f(4))$

Exercice N°3

Par lecture graphiques :

1) Déterminer en justifiant : $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, f '(1) , f '(2) et f ''(2).

* $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$ car $x = 0$ est A.V. à $\mathcal{C}_f$
* $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$ car $y = 0$ est A.H à $\mathcal{C}_f$ au $v(+\infty)$
* $f'(1) = 0$ car $\mathcal{C}_f$ admet en 1 une tg H.
* $f'(2) = \dfrac{y_B - y_D}{x_B - x_D} = \dfrac{\frac{3}{2} - 0}{2-4} = -\dfrac{3}{4}$.
* $f''(2) = 0$ car B est un pt d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$.

2) Dresser le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0

3) Soit g la restriction de f sur [1, +∞[, montrer que g est une bijection de [1, +∞[sur un intervalle J que l'on précisera .

g est cont et est $\searrow$ sur $[1, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1; +\infty[) =]0 ; 2]$

4) g^{-1} est –elle dérivable à gauche en 2. Justifier.

on a : $g(1) = 2 \iff g^{-1}(2) = 1$.

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$
$g(x)$	2	0

on a g est dérivable à droite en 1

et $g'_d(1) = 0$ donc $\mathscr{C}_g$ admet une demi-tangente horizontale au point $(1,2)$

D'où $\mathscr{C}_{g^{-1}}$ admet une demi-tangente verticale au point $(2,1)$

Donc g^{-1} n'est pas dérivable à droite en 2

5) Vérifier que g^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et calculer $(g^{-1})'(\frac{3}{2})$.

on a : $g(2) = \frac{3}{2} \iff g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 2$.

Th : si g est dérivable en a et $g'(a) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable en $b = g(a)$ et on a : $(g^{-1})'(b) = \frac{1}{g'(g^{-1}(b))} = \frac{1}{g'(a)}$

on a g est dérivable en 2 et $g'(2) = -\frac{3}{4} \neq 0$

D'où g^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$ et

$$(g^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

6) Construire (C) la courbe de g^{-1} sur le même repère.