مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد والحساب)

الملخص // الشعبة: الأولى جذع مشترك علوم وتكنولوجيا.

ملخص: حول الأعداد والحساب// التحضير الجيد للبكالوريا// الشعبة: 01 ع.

❶ المجموعات الأساسية للأعداد:

① مجموعة الأعداد الطبيعية:

0؛ 1؛ 2؛ ... تسمى **أعداد طبيعية**.
نرمز إلى **مجموعة الأعداد الطبيعية** بالرمز $\mathbb{N}$.
ونكتب: $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$

أمثلة: ● $21 \in \mathbb{N}$؛ ● $-21 \notin \mathbb{N}$.

ملاحظات:

- 0 هو أصغر عدد طبيعي $(0 \in \mathbb{N})$
- المجموعة $\mathbb{N}$ **غير منتهية**.
- $\mathbb{N}^*$ هي $\mathbb{N}$ ما عدا 0،

ونكتب: $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1; 2; \dots\}$.

② مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية:

...؛ 2؛ 1؛ 0؛ -1؛ -2؛ ... تسمى **أعداد صحيحة نسبية**.
نرمز إلى **مجموعة الأعداد الصحيحة النسبية** بالرمز $\mathbb{Z}$.
ونكتب: $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$

أمثلة: ● $-21 \in \mathbb{Z}$؛ ● $-\frac{21}{2} \notin \mathbb{Z}$.

نتيجة:

- كل **عدد طبيعي** هو **عدد صحيح نسبي**، نقول أنّ المجموعة $\mathbb{N}$ **محتواة في** (أو **جزء من**) المجموعة $\mathbb{Z}$ ونكتب: $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}}$.

③ مجموعة الأعداد العشرية:

العدد العشري هو العدد الذي يُمكن كتابته على الشكل: $\boxed{\frac{p}{10^n}}$ حيث $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.
نرمز إلى **مجموعة الأعداد العشرية** بالرمز $\mathbb{D}$.

أمثلة: ● $7 = \frac{7}{10^0} \in \mathbb{D}$؛ حيث: $\begin{cases} p = 7 \in \mathbb{Z} \\ n = 0 \in \mathbb{N} \end{cases}$.

● $\frac{-23}{5} = \frac{-46}{10^1} \in \mathbb{D}$؛ حيث: $\begin{cases} p = -46 \in \mathbb{Z} \\ n = 1 \in \mathbb{N} \end{cases}$.

● $\frac{4}{7} \notin \mathbb{D}$؛ لأنّه: **لا يُمكن كتابته على الشكل** $\boxed{\frac{p}{10^n}}$ حيث $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

نتيجة:

- كل **عدد صحيح نسبي** هو **عدد عشري**، إذن: $\boxed{\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}}$.

④ مجموعة الأعداد الناطقة:

العدد الناطق هو العدد الذي يُمكن كتابته على الشكل: $\boxed{\frac{p}{q}}$ حيث $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$.
نرمز إلى **مجموعة الأعداد الناطقة** بالرمز $\mathbb{Q}$.

أمثلة:

● $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$؛ حيث: $\begin{cases} p = 3 \in \mathbb{Z} \\ q = 2 \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$.

● $\frac{-1}{7} \in \mathbb{Q}$؛ حيث: $\begin{cases} p = -1 \in \mathbb{Z} \\ q = 7 \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$.

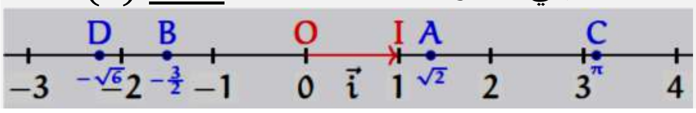
● $\pi \notin \mathbb{Q}$ وَ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$؛ لأنّه: **لا يُمكن كتابتهما على الشكل** $\boxed{\frac{p}{q}}$ حيث $\begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$.

نتيجة:

- كل عدد **عشري** هو **عدد ناطق**، إذن: $\boxed{\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}}$.
- كل عدد **حقيقي** غير **ناطق** هو **عدد أصم**.

⑤ مجموعة الأعداد الحقيقية:

مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي مجموعة **فواصل نقط** مستقيم مُزوّد بمعلم $(O; I)$.
العدد الحقيقي 0 هو **فاصلة** المبدأ O، نكتب: $O(0)$.
العدد الحقيقي 1 هو **فاصلة** النقطة I، نكتب: $I(1)$.



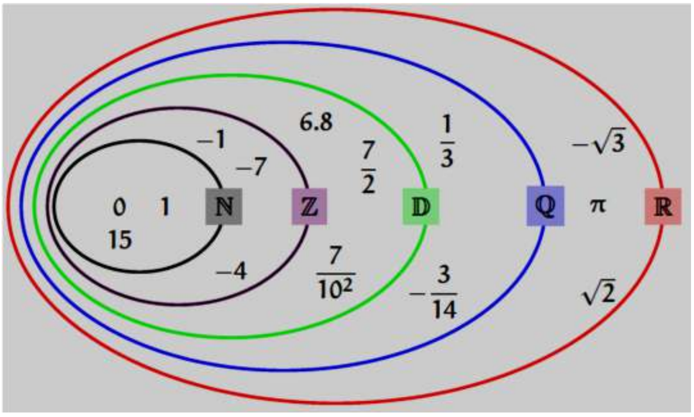
ملاحظات:

- $\mathbb{R}$ هي مجوعة **الأعداد الناطقة** مع مجموعة **الأعداد الصماء**.
- يُمكن أن نكتب $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- $-\infty$ و $+\infty$ **ليسا بعددين** إنّما **رمزان يعبران عن اللانهاية**.
- توجد **مجموعات غير أساسية** مثل: $\mathbb{N}^*$؛ $\mathbb{Z}^*$؛ $\mathbb{Q}^*$؛ $\mathbb{R}^*$؛ $\mathbb{R}^+$؛ $\mathbb{R}^{-*}$؛ $]-\infty; 0]$.
- $\mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$؛ $\mathbb{R}^{*-} =]-\infty; 0[$.

⑥ مقارنة مجموعات الأعداد:

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

تمثيل مجموعات الأعداد:



⑦ طريقة (لمعرفة طبيعة عدد):

- لمعرفة طبيعة عدد،
  ✌ **نُبسطه،**
  ✌ ثمّ **نبحث عن أصغر مجموعة ينتمي إليها** هذا العدد.

⑧ خواص:

خاصية 01:

- يتميز كل **عدد ناطق** بكتابة **عشرية تتضمن دوراً.**

أمثلة:

● $\frac{20}{11} = 1,\underline{81}$؛ ● $\frac{3}{2} = 1,5\underline{0}$؛ ● $-7 = -7,\underline{0}$.

$1,\underline{81}$ تسمى **الكتابة العشرية الدورية** للعدد $\frac{20}{11}$، ودورها 81.

طريقة:

☝ **يُمكن الانتقال من الكتابة الكسرية إلى الكتابة العشرية لعدد ناطق، باستعمال الحاسبة.**
☝ **ويُمكن الانتقال من الكتابة العشرية إلى الكتابة الكسرية لعدد ناطق،** كما يلي:

-إذا كان الدور مباشرة بعد الفاصلة.

القاعدة:

$$\text{الجزء الصحيح},\underline{\text{الدور}} = \text{الجزء الصحيح} + \frac{\text{الدور}}{10^{\text{عدد أرقام الدور}}-1}$$

مثال: ● $\boxed{2,\underline{14} = 2 + \frac{14}{10^2-1} = \frac{212}{99}}$.

-إذا كان الدور ليس مباشرة بعد الفاصلة.

مثال: ● البحث عن الصيغة الكسرية للعدد $34,1\underline{456}$.

لدينا: $\mathbf{10} \times 34,1\underline{456} = 341,\underline{456}$

وَ $341,\underline{456} = 341 + \frac{456}{10^3-1} = \frac{341115}{999}$

إذن: $\boxed{\mathbf{34,1\underline{456} = \frac{341115}{999} \times \frac{1}{10} = \frac{341115}{9990}}}$.

خاصية 02:

- كل **عدد ناطق يقبل كتابة وحيدة،** على شكل كسر **غير قابل للاختزال** $\boxed{\frac{p}{q}}$، p و q **أوليان فيما بينهما**

أي: $\boxed{PGCD(p;q) = 1}$.

مثال: ● $\frac{51}{4} = \frac{102}{8}$، $\frac{51}{4}$ شكل غير قابل للإختزال لـ $\frac{102}{8}$.

⑨ معرفة إذا كان عدد ناطق عدد عشري:

(الخاصية المميزة لعدد عشري)

- لمعرفة إذا كان **عدد ناطق** هو **عدد عشري**
  ☝ **نكتبه على شكل كسر غير قابل للاختزال،**
  ☝ **بعد الاختزال،** فإذا أمكن **كتابة مقامه على الشكل** $2^n \times 5^m$، **فالعدد عشري؛ وإن لم يمكن فهو ليس عشري.**

مثال: ● $\frac{3}{20} \in D$؛

لأنّ: $\frac{3}{20}$ كسر **غير قابل للاختزال** وَ $20 = 2^2 \times 5^1$.

● $\frac{21}{18} \notin D$؛

لأنّ: $\frac{7}{6} = \frac{21}{18}$؛ وَ 6 **لا يُمكن كتابته على الشكل** $2^n \times 5^m$.

تمارين:

01؛ 02؛ 03؛ 14؛ 15؛ 16؛ 17؛ 19؛ 20؛ 23 ص18–19.

❷ الأعداد القابلة للإنشاء:

حل النشاط 2ص2.

① الأعداد القابلة للإنشاء:

نقول **عن العدد x أنّه قابل للإنشاء،** إذا تمكنا باستعمال مدور ومسطرة غير مدرجة إنشاء نقطة M من مستقيم (d) مزود بمعلم $(O;I)$ فاصلتها x.

② إنشاء الأعداد الناطقة:

مبرهنة:

كل **الأعداد الناطقة قابلة للإنشاء.**

طريقة إنشاء عدد ناطق:

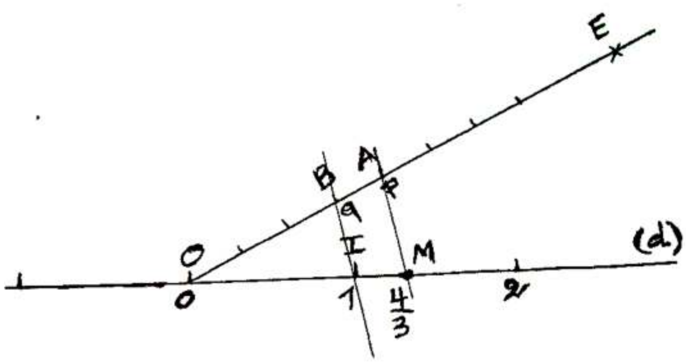
لإنشاء عدد ناطق $\frac{p}{q}$ نتبع الخطوات التالية:

- نرسم مستقيم (d) مزود بمعلم $(O\,;I)$.
- نُعيّن نقطة E خارج المستقيم (d).
- نُعلم على المستقيم (OE)، النقطتين A و B فاصلتيهما p و q على الترتيب.
- نرسم المستقيم (AM) الذي يُوازي (BI)، حيث $M \in (d)$ **بتطبيق نظرية طالس** نجد:

$\boxed{\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{OI}}$، ولدينا: $OI = 1$؛ $OA = p$ وَ $OB = q$

وبالتالي: $OM = \frac{p}{q}$ إذن: $\boxed{M\left(\frac{p}{q}\right)}$.

مثال: ● إنشاء العدد $\frac{4}{3}$:



حل النشاط 03 ص02

③ إنشاء الأعداد الصماء:

مبرهنة:

إذا كان x **قابل للإنشاء** فإنّ $\sqrt{x}$ **قابل للإنشاء.**

طريقة إنشاء عدد أصم:

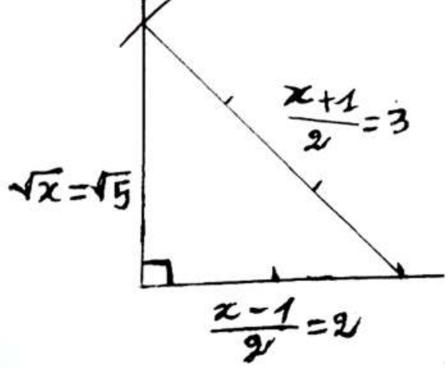
لإنشاء عدد أصم $\sqrt{x}$ نتبع الخطوات التالية:

▪ نُنشئ مثلث قائم ABC، **طول وتره** $\frac{x+1}{2}$،
وَ**طول أحد ضلعيه القائمين** $\frac{x-1}{2}$.
بتطبيق نظرية فيتاغورث نجد طول الضلع القائم الآخر يساوي $\sqrt{x}$.

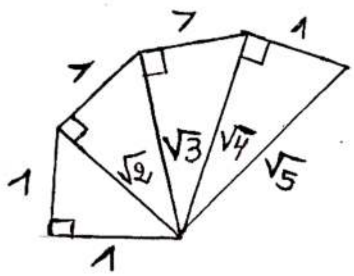
▪ باستعمال مدور **ننقل الطول** على مستقيم (d) مزود بمعلم $(O;I)$.

مثال: ● إنشاء العدد $\sqrt{5}$:

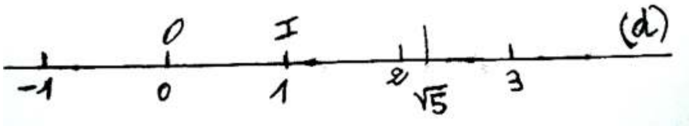
ط1) لدينا: $x=5$ ومنه: $\frac{x+1}{2}=3$ وَ $\frac{x-1}{2}=2$.



ط2)



▪ باستعمال مدور **ننقل الطول** على مستقيم (d) مزود بمعلم $(O;I)$.



ملاحظة مهمة:

▪ يجب استعمال الطول OI لرسم المثلث القائم على ورقة خارجية، ثم نستعمل المدور لإنشاء $\sqrt{x}$ على المستقيم الحقيقي.

▪ توجد طُرق أخرى قُم بالبحث عنها.

تمرين: 77 ص23.

❸ البرهان بالخُلف:

البرهان بالخُلف:

البرهان بالخلف هو نمط من أنماط البرهان، وهو برهنة أساسها إثبات صحة المطلوب، بإبطال نقيضه أو فساد المطلوب بإثبات نقيضه.

مثال: ● إثبات أنّ العدد $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقاً:

❹ الأعداد الأولية:

① تعريف:

نسمي عددا أولياً هو كل **عدد طبيعي** يقبل بالضبط **قاسمين مختلفين** هما **1** و**العدد نفسه**.

أمثلة:

● 0 **ليس عدد أولي** لأنّه يقبل مالا نهاية من القواسم $(0=0\times a)$؛

● 1 **ليس عدد أولي** لأنّه يقبل قاسما واحدا وهو نفسه $(1=1\times 1)$؛

● **أصغر عدد أولي** هو العدد 2، وهو العدد الوحيد الذي أولي وزوجي في نفس الوقت.

② الأعداد الأولية الأصغر من 100:

2؛ 3؛ 5؛ 7؛ 11؛ 13؛ 17؛ 19؛ 23؛ 29؛ 31؛ 37؛ 41؛ 43؛ 47؛ 53؛ 59؛ 61؛ 67؛ 71؛ 73؛ 79؛ 83؛ 89؛ 97.

③ طريقة اختبار أولية عدد طبيعي:

للتعرف على **أولية عدد طبيعي ما** نتبع ما يلي:

▪ نختبر قابلية قسمة هذا العدد على كل من الأعداد الأولية حسب ترتيبها التصاعدي.

▪ نتوقف عن عملية القسمة عند أوّل باقي معدوم أو عندما نُصادف أوّل حاصل قسمة أصغر من المقسوم عليه.

▪ إذا كان الباقي عند آخر عملية قسمة معدوماً فإنّ العدد ليس أوّلي وإلا فهو أولي.

ولتسهيل العملية، يُمكن استعمال جدول.

هل يقبل العدد (197 مثلا) القسمة على	2	3	..
الإجابة	لا		
حاصل القسمة	98		

أمثلة: ● دراسة أولية العدد 197:

هل يقبل العدد 197 القسمة على	2	3	5	7	11	13	17	
الإجابة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	**لا**	
حاصل القسمة	98	65	39	28	17	19	11	11<17

أوّل حاصل قسمة 11 **أصغر** من المقسوم عليه 17،

إذن: 197 **أوّلي.**

● دراسة أولية العدد 259:

هل يقبل العدد 259 القسمة على	2	3	5	7
الإجابة	لا	لا	لا	**نعم**
حاصل القسمة	129	86	51	37

نلاحظ أنّ: $259 = 7 \times 37$، **إذن:** **259 ليس أوّلي.**

تمارين: **56** و**57** ص**21**.

④ طريقة تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

مبرهنة:

كل عدد طبيعي **غير أولي**، وأكبر من **1** يقبل **تحليلا وحيدا إلى جداء عوامل أولية.**

طريقة تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

- نقسم العدد على أصغر عدد أوّلي يكون قاسما له.
- نقسم حاصل القسمة على أصغر عدد أولي يكون قاسما له.
- نُكرر عمليات القسمة المتتابعة حتى نصل إلى حاصل القسمة مساوٍ لـ **1**.
- جداء هاته القواسم الأولية هو تحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد.

مثال: ● تحليل العدد 120 إلى جداء عوامل أولية:

لدينا:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

إذن: $\boxed{\mathbf{120 = 2^3 \times 3 \times 5}}$.

⑤ استعمال التحليل إلى جداء عوامل أولية:

- **تعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين**

وذلك، بحساب **جداء العوامل الأولية المشتركة** الواردة في تحليل هاذين العددين **مأخوذة مرة واحدة وبأصغر** أس؛ نجد: $PGCD(a;b) = \cdots \times \ldots =$.

- **تعيين المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين**

وذلك، بحساب **جداء كل العوامل الأولية** الواردة في تحليل هاذين العددين **مأخوذة مرة واحدة وبأكبر** أس؛ نجد: $PPCM(a;b) = \cdots \times \ldots =$.

- **تعيين الشكل غير قابل للاختزال**

وذلك، بتحليل كل من البسط والمقام إلى **جداء عوامل أولية ثمّ** اختزال كل العوامل الأولية المشتركة.

- **تبسيط الجذور**

وذلك، بتحليل العدد إلى **جداء عوامل أولية**، وباستعمال الخاصية من أجل $a \geq 0$ فإنّ $\sqrt{a^2} = a$.

- **معرفة عدد قواسم عدد طبيعي**

وذلك، بتحليل العدد إلى **جداء عوامل أولية**، **ثمّ** إضافة **1** إلى الأسس، جداء الأعداد المُحصل عليها هو عدد القواسم.

تطبيق: $a = 156$ و$b = 2454$.

1) أحسب $PGCD(a;b)$ و$PPCM(a;b)$.

2) أكتب $\frac{a}{b}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.

3) بسّط العدد $\sqrt{a}$.

الحل: **لدينا:** $a = 156$ و$b = 2454$.

1) حساب $PGCD(a;b)$ و $PPCM(a;b)$:

لدينا:

156	2
78	2
39	3
13	13
1	

2454	2
1227	3
409	409
1	

وبالتالي: $\boxed{a = 2^2 \times 3 \times 13}$، و $\boxed{b = 2 \times 3 \times 409}$.

إذن: $\boxed{PGCD(a;b) = 2 \times 3 = 6}$

و $\boxed{PPCM(a;b) = 2^2 \times 3 \times 13 \times 409 = 63804}$.

2) كتابة $\frac{a}{b}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال:

ط01: $\frac{a}{b} = \frac{2^2\times3\times13}{2\times3\times409} = \frac{2\times13}{409} = \frac{26}{409}$

ط02: $\frac{a}{b} = \frac{a \div PGCD(a;b)}{b \div PGCD(a;b)} = \frac{a\div6}{b\div6} = \frac{26}{409}$

3) تبسيط العدد $\sqrt{a}$:

لدينا: $\sqrt{a} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 13} = 2\sqrt{39}$.

حل التمرين: **29** ص**22**.

① التحقق أن A يقبل 24 قاسما :

إذن عدد قواسم A هو : $(3+1)(2+1)(1+1) = 24$

② تعيين k بحيث kA مربع تام :

$7 \times 2 \times A = 2 \times 2^3 \times 5^2 \times 7 \times 7 = 2^4 \times 5^2 \times 7^2 = (2^2 \times 5 \times 7)^2$

و منه : $k = 2 \times 7 = 14$

③ تعيين m بحيث mA مكعب تام :

$5 \times 7 \times 7 \times A = (2 \times 5 \times 7)^3$ و منه : $m = 5 \times 7^2 = 245$

تمارين: **59**؛ **65**؛ **67**؛ **68**؛ **72** ص**21**-**22**.