Exercice N°1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & si\ x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[\\ \dfrac{|x-1|}{x+1} & si\ x\in[-1;1]\end{cases}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$.

b) Interpréter graphiquement les résultats obtenus .

2) f est-elle continue en 1 ? justifier .

3) Dans la figure ci-dessous , $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f .

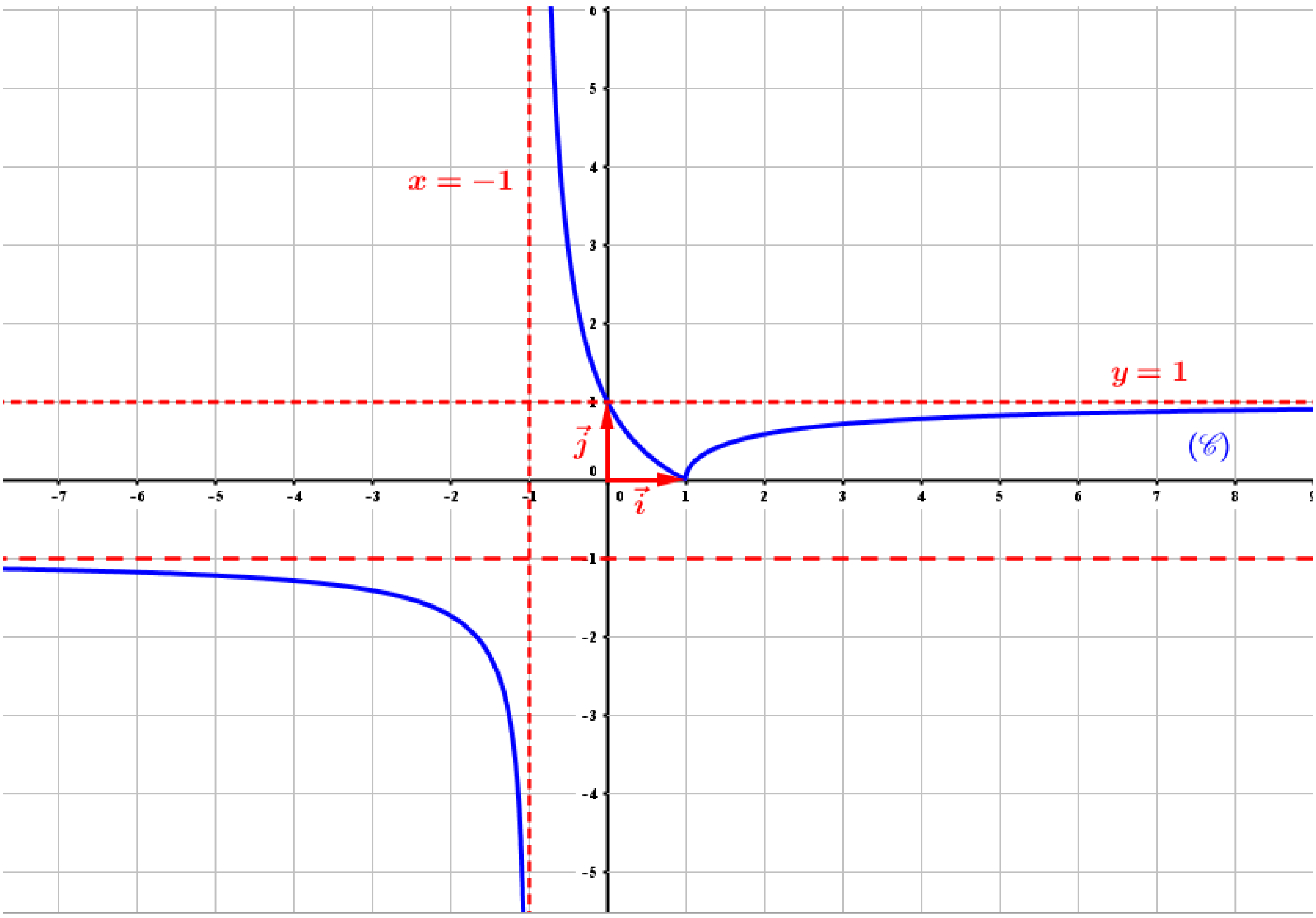
a) Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x)=k$ pour tout $k\in\mathbb{R}$

b) Déterminer graphiquement : $(f\circ f)(1)$, $(f\circ f)(0)$, $f(]-\infty;-1[)$, $f(]1;+\infty[)$, $f([-1,1])$

4) Soit h la restriction de f à $]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$ et on pose $g(x)=(h\circ h)(x)$.

a) Déterminer $\mathcal{E}$ l'ensemble de définition de g .

b) Calculer les limites aux bornes de $\mathcal{E}$.



Exercice N°2

Dans la figure ci-dessous $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. $(\mathscr{C})$ admet :

- La droite $\mathcal{D}: y = 1$ est une asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de $+\infty$ **et** $-\infty$.
- L'axe des ordonnées est une asymptote verticale.

1) a) Déterminer graphiquement les limites de f en $+\infty$, $-\infty$, 0^+ et 0^- .

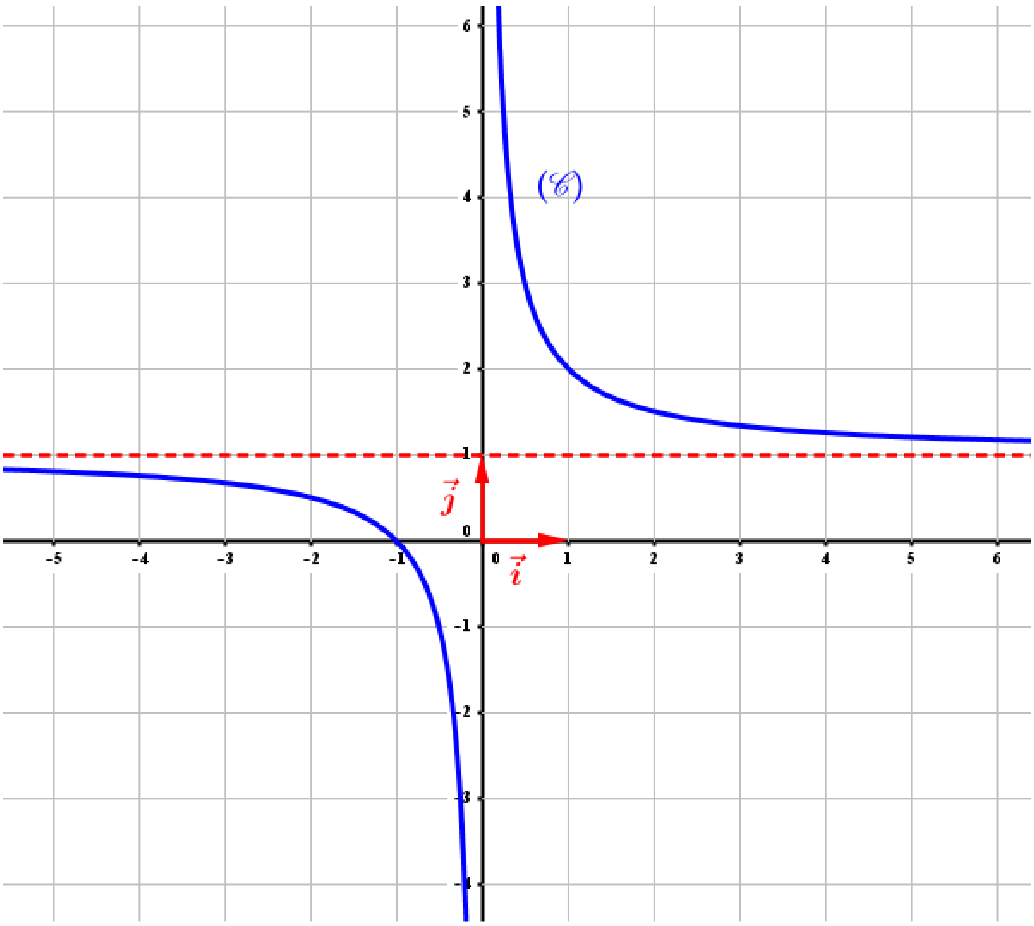
b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{x}{x^2+1}\right)$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{[f(x)]^2-1}{f(x)-1}$.

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x > 1 \\ \frac{3x^2-3}{x^2+x-2} \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

a) g est-elle prolongeable par continuité en 1 ? justifier .

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) Monter que l'équation $\sqrt{g(x)} = \frac{5}{2}$ admet dans $]-\infty;1[$ une unique solution α puis vérifier que $-3 < \alpha < -2,9$.



MJSCJRJLOCFJ

Exercice N° 3

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 2i$; $z_B = i$; $z_C = 1+i$ et $z_D = -1+i$. On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice (unités : 4 cm).

1) Soit $f : \begin{array}{l}\mathcal{P}\backslash\{B\}\to\mathcal{P}\\ M(z)\mapsto M'(z')\end{array}$ tel que $z' = \frac{i(z-2i)}{z-i}$.

a) Développer : $(z+1-i)(z-1-i)$.

b) Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous la forme algébrique puis exponentielle.

2) a) Montrer que pour tout $z \neq i$: $|z'| = \frac{AM}{BM}$.

b) Montrer que pour tout $z \neq i$ et $z \neq 2i$: $Arg(z') = \left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{AM}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Déterminer et construire l'ensemble ($\mathcal{E}$) :$\{M(z)\ tels\ que\ |z'| = 1\}$.

d) Déterminer et construire l'ensemble ($\mathcal{F}$) : $\left\{M(z)\ tels\ que\ Arg(z') = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ avec\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice N° 4 :

1) Soit $\theta \in [0;2\pi[$. On pose $f_\theta(z) = z^2 - \left(i+e^{i\theta}\right)z + (1+i)\left(-1+e^{i\theta}\right)$.

a) Calculer $f_\theta(1+i)$.

b) En déduire les solutions z' et z'' dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f_\theta(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe rapporte à un repère orthonormé direct on considère les points $A(-1), B(i\sqrt{3})\ et\ M(-1+e^{i\theta})$.

a) Montrer que lorsque θ varie dans $[0;2\pi[$, M varie sur un cercle ($\mathcal{C}$) de center A dont on précisera le rayon .

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles la droite (BM) est tangente au cercle ($\mathcal{C}$)