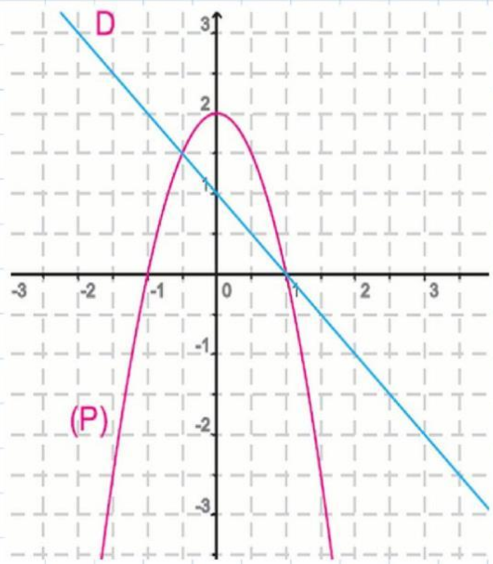
Chapitre : 01 | $3^{\text{éme}}$ Technique

Généralités sur les fonctions

I. Introduction:

Activité 1 p 07:



Dans le graphique ci-contre la parabole (P) est la courbe représentative d'une fonction, $f : x \mapsto ax^2 + b$, la droite D est celle d'une fonction affine $g : x \mapsto cx + d$

1°) Déterminer les réels a, b, c et d.

- La parabole P est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$

  On a: $f(0) = a \times 0^2 + b = b$, d'autre part on a: $f(0) = 2$ donc $\boxed{b = 2}$

  D'autre part on a: $f(1) = 0$ donc $a + 2 = 0$ c.à.d $\boxed{a = -2}$

  Ainsi $\boxed{f(x) = -2x^2 + 2}$

- On a: $g(0) = c \times 0 + d = d$, or graphiquement $g(0) = 1$

  donc $\boxed{d = 1}$

  $g(x) = cx + 1$, on a: $g(1) = c \times 1 + 1 = c + 1$, or $g(1) = 0$

  donc $c + 1 = 0$ et par suite $c = -1$

  Ainsi: $\boxed{g(x) = -x + 1}$

2°) Déterminer, graphiquement puis par le calcul, les coordonnées des points d'intersection de (P) et D.

Les points d'intersection de P et D sont $(1,0)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Par calcul : $M(x,y) \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = -x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+2 = -x+1 \\ y = -x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+2+x-1=0 \\ y = -x+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+x+1=0 \\ y = -x+1 \end{cases}$

$-2x^2+x+1=0$; on a : $a+b+c=0$ donc les solutions

sont $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{2}$ d'où $y_1 = -1+1=0$ et $y_2 = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2}$

Donc les points d'intersection sont $(1,0)$ et $\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$.

3°) Utiliser le graphique pour résoudre l'inéquation $-2x^2 + x + 1 \geq 0$

$-2x^2+x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x)-g(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant g(x)$

Résoudre cette inéquation graphiquement revient à déterminer les abscisses des points de la parabole (P) situés au dessus de la droite (D)

$f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$ donc $\boxed{S_{\mathbb{R}} = \left[-\frac{1}{2} ; 1\right]}$

II. Généralités :

Activité 3 p 09 :

Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f, à variable réelle, dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = x^2 + x - 4$

$$\boxed{D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) \text{ existe}\}}$$

Dans notre cas f est défini sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 - x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x(x-1) \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0 \text{ et } x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0 \text{ et } x \neq 1\}$$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 ; 1\}}$

- $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 2}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow |x| - 2 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 2 \Leftrightarrow x \neq 2 \text{ et } x \neq -2$$

Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2 ; 2\}}$

- $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1} - 1}$

$$x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 \geqslant 0 \text{ et } \sqrt{x+1} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1 \text{ et } \sqrt{x+1} \neq 1$$

$$\Leftrightarrow x \geqslant -1 \text{ et } x \neq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, +\infty[\text{ et } x \neq 0$$

Donc $\boxed{D_f = [-1, +\infty[\setminus \{0\}}$

Définition :

Soit f une fonction numérique à variable réelle.
L'ensemble des réels x tel que $f(x)$ existe s'appelle ensemble de définition de f ou domaine de définition de f et on le note D_f

Exemple: Soit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$x \in D_f \Leftrightarrow 1 - x^2 \geqslant 0$

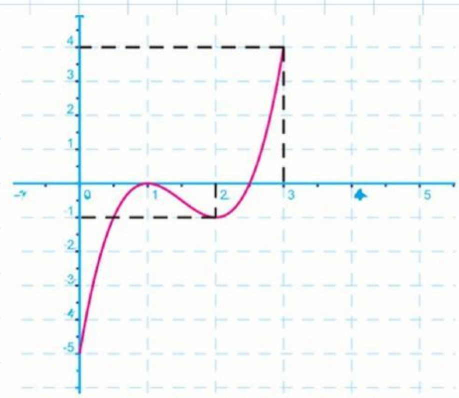
Cherchons $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1 - x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\boxed{D_f = [-1 ; 1]}$

Activité 4 p 09 :

Soit f la fonction définie sur [0 , 3] par :
$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.
La figure ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$



1°) Répondre par vrai ou faux.

a. f est croissante dans l'intervalle [0 , 2] Faux

b. f est croissante dans l'intervalle [2 , 3] Vrai

c. f est décroissante dans l'intervalle [1 , 2] Vrai

d. f est monotone dans l'intervalle [1 , 3] **Vrai**

e. f admet un maximum égal à 0 au point 1 **Vrai**

f. f admet un maximum en x = 3. **Vrai**

g. Dans l'intervalle $[1 , \frac{5}{2}]$, f admet un minimum en 2 égal à – 1. **Vrai**

2°) Résumer dans un tableau les variations de f.

x	0		1		2		3
f	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4

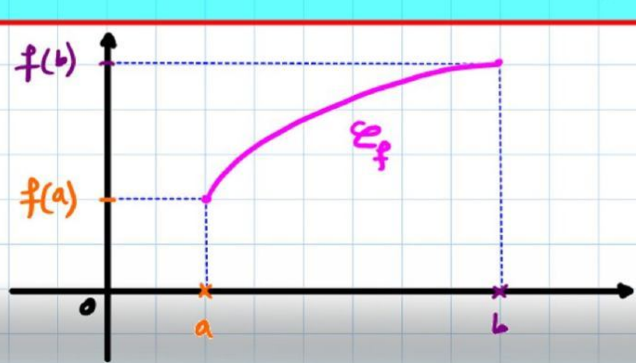
Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que :

- f est croissante sur I $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$
- f est décroissante sur I $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$
- f est strictement croissante sur I

  $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$
- f est strictement décroissante sur I

  $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in I$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$



Fonction strictement croissante

Activité :

Soit f la fonction à variable réelle définie par $f(x)=\frac{1}{2}x^2-|x|$

1) Déterminer D_f.

2) Soient a et b deux réels positifs tel que $a<b$,

vérifier que : $f(b)-f(a)=\frac{1}{2}(b-a)(b+a-2)$

3) Déduire que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $[0,1]$

Solution :

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$.

2) $a\in[0,+\infty[$ et $b\in[0,+\infty[$

$$f(b)-f(a)=\left(\frac{1}{2}b^2-|b|\right)-\left(\frac{1}{2}a^2-|a|\right)$$

$|a|=a$ et $|b|=b$

$$=\frac{1}{2}b^2-b-\frac{1}{2}a^2+a$$

$$=\frac{1}{2}(b^2-a^2)-b+a$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(b+a)-(b-a)$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(b+a)-2\times\frac{1}{2}(b-a)$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)(b+a-2)$$

3) Soient a, b deux réels de $[1, +\infty[$ tel que $a < b$

- $\frac{1}{2} > 0$
- $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$
- $a > 1$ et $b > 1$ donc $a + b > 2$ d'où $a + b - 2 > 0$

Alors $f(b) - f(a) = \frac{1}{2}(b - a)(a + b - 2) > 0$

c'est à dire $f(a) < f(b)$, donc f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

Définition:

> Soient a et b deux réels distincts de I
> Le réel $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ s'appelle le taux d'accroissement de f entre a et b.

Remarque:

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall a, b \in I$ $(a \neq b)$ on a :

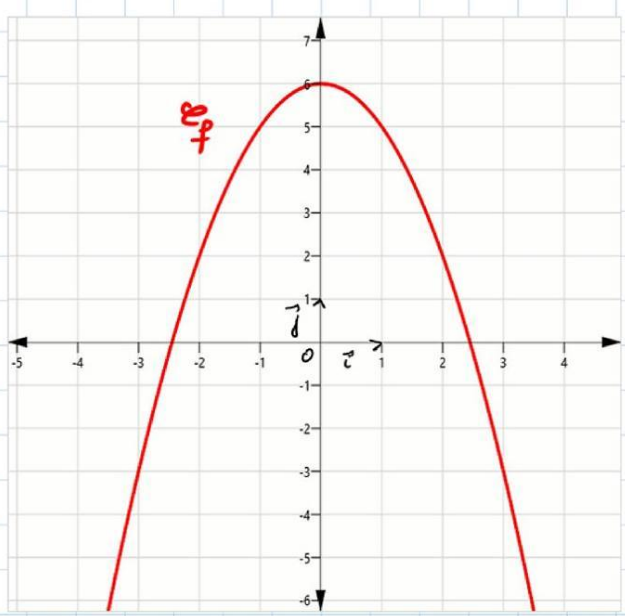
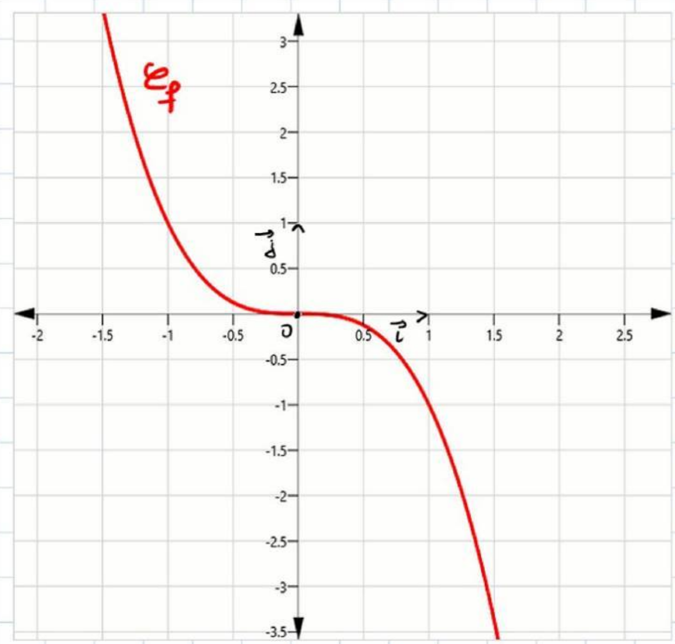
$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0$$

- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall a, b \in I$ $(a \neq b)$ on a :

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 0$$

f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall a, b \in I$ $(a \neq b)$ on a :

$$T = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Fonction paire	Fonction impaire
Définition : Une fonction f est dite paire si $\begin{cases} \forall x \in D_f \text{ on a : } -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	**Définition :** Une fonction f est dite impaire si $\begin{cases} \forall x \in D_f \text{ on a : } -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$
Remarque : La courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à $(O, \vec{j})$	**Remarque :** La courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est symétrique par rapport à O.
	

Activité 11 p12:

Soit f la fonction définie sur $[-2\ ,\ 2]$ par : $f(x) = x\,|x|$

a- Montrer que f est impaire

Soit $x \in D_f \iff x \in [-2, 2] \iff -2 \leq x \leq 2$

$\iff 2 \geq -x \geq -2 \iff -2 \leq -x \leq 2$

$\iff -x \in D_f$

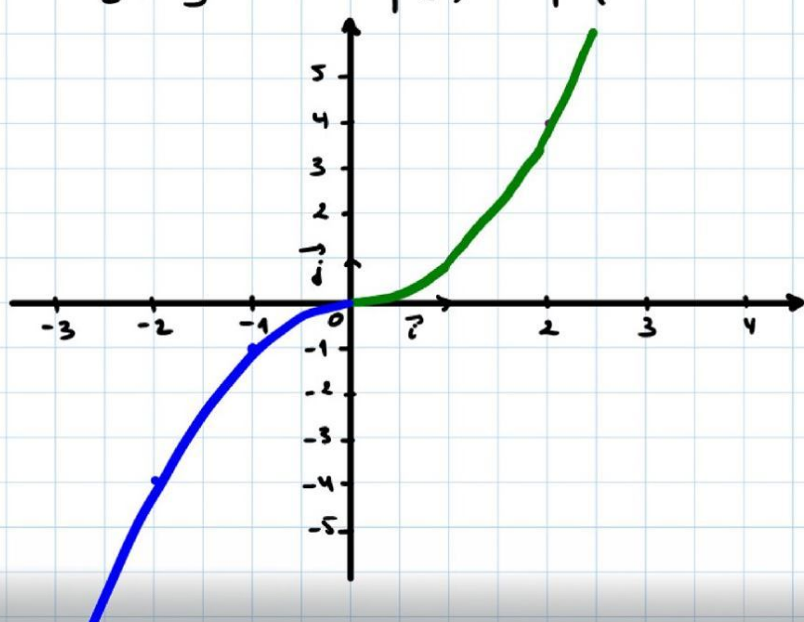
$f(-x) = -x\,|-x| = -x\,|x| = -f(x)$ $\boxed{|x| = |-x|}$

Donc f est impaire

b- Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Puisque f est impaire, il suffit d'étudier f sur $[0,2]$ puis on termine sa courbe par la symétrie par rapport à O

Si $x \in [0, 2]$ alors $f(x) = x|x| = x \times x = x^2$ (Parabole)



Définition :

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D$

- Lorsque $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur D, on dit que f admet un maximum absolu en x_0, c'est à dire pour tout réel x de D ; $f(x) \leq f(x_0)$.
- Lorsque $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur D, on dit que f admet un minimum absolu en x_0, c'est à dire pour tout réel x de D ; $f(x) \geq f(x_0)$.
- On dit que f admet maximum local (ou relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D où $f(x_0)$ est la plus grande valeur de f sur I
- On dit que f admet minimum local (ou relatif) en x_0 s'il existe un intervalle ouvert I inclus dans D où $f(x_0)$ est la plus petite valeur de f sur I

Activité 12 p 15 :

Le graphique ci- contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Répondre par vrai ou faux

- f admet un maximum en 0 égal à 2 **Vrai**
- f admet un minimum local en 2 égal -2 **Vrai**
- f admet un maximum local en -1 égal à -2 **Faux**
- f admet un minimum local en 1 égal à 0 **Faux**