3M **A.S : 2020-2021**

Série d'exercices : Généralités des fonctions Série 1

EXERCICE N°0

I un intervalle : I = $[-1\ ;\ +\infty[$ Soient : f : **I** → R ,x → $\sqrt{1+x}$ et g : I → R, x → $1+\frac{x}{2}$

Montrer que, pour tout x de **I** : f(x) ≤ g(x)

EXERCICE N°1

On considère la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par f(x) =$\frac{-4x^2+8x-2}{1-2x}$.

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que f(x) = a x + b + $\frac{c}{1-2x}$

2°) Etudier les variations des fonctions g et h définies sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$ par f(x) = $\frac{1}{1-2x}$ et h (x) = 2x -3.

3°) Déduire des deux questions précédentes les variations de la fonction f.

EXERCICE N°2

Soit f la fonction définie sur$]-3,+\infty[$ par **f(x) =** $\mathbf{\frac{2x+3}{x+5}}$

1°) Démontrer que f (x) peut aussi s'écrire : **f(x) = 2-**$\mathbf{\frac{7}{x+5}}$.

2°) Démontrer que f est croissante sur $]-3,+\infty[$

3°) a) Démontrer que f admet un minimum, le préciser.

b) Démontrer que f admet un majorant, en préciser un.

c) En déduire que f est bornée et indiquer un encadrement de f(x).

EXERCICE N°3

On considère les fonctions de références suivantes :

U définie sur R par **U(x) = x²** et **V** définie sur l'ensemble des réels non nuls par **V(x) =** $\mathbf{\frac{1}{x}}$**.**

Décomposer chacune des fonctions suivantes à l'aide des fonctions **U** et **V** et de fonctions affines. En déduire leurs variations sur l'intervalle donné.

a) **f(x) = (4-2x)² sur** $[\mathbf{2};+\infty[$.

b) g(x) = $\mathbf{\frac{2}{x}}$ **- 1 sur** $[\mathbf{0};+\infty[$.

EXERCICE N°4

Etudier les variations de f sur I.

1°) f(x) = x² - 2x +1, I = $[\mathbf{1};+\infty[$ **.**

2°) f(x) = x³ - x² + 1, I = $\left|\mathbf{0};\frac{2}{3}\right|$

EXERCICE N°5

On considère la fonction f défini dur par : **f(x) = x (1-x)**

1°) Montrer que, pour tout x de R : f(x) ≤ $\frac{1}{4}$

2°) En déduire que la fonction f admet un maximum en x = $\frac{1}{2}$

3°) Démontrer que **f(x) =** $\mathbf{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2}\ ;\ +\infty\right[$

EXERCICE N°6

Montrer que la fonction f **: f(x) = 1 – x +** $\mathbf{\frac{1}{1+x}}$ est décroissante sur $]-1,+\infty[$

EXERCICE N°7

Soit : **f : R* → R , x → x +** $\mathbf{\frac{1}{x}}$

1°) Montrer que : pour tout x de $\left[\frac{1}{2};3\right]$, on a : **2 ≤ f(x) ≤** $\mathbf{\frac{10}{3}}$

2°) En déduire que : ∀(a,b,c,d,e,f,g,h)∈ $\mathbf{R^*_+}$: $\frac{a}{h}+\frac{b}{g}+\frac{c}{f}+\frac{d}{e}+\frac{e}{d}+\frac{f}{c}+\frac{g}{b}+\frac{h}{a}\geq 8$

EXERCICE N°8

On considère les fonctions f et g définie par **f(x) = x² +** $\mathbf{\frac{1}{x^2}}$ et **g (x) = x -** $\mathbf{\frac{1}{x}}$

1°) Déterminer le domaine de définition de g étudier sa parité .

2°) Montrer que g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$

3°) Sur $]0,+\infty[$, résoudre l'équation g (x) = 0 et chercher le signe de g(x).

4°) Déterminer les variations de g²

5°) Déterminer le domaine de définition de f et étudier sa parité.

6°) Exprimer f en fonction de g²

7°) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$. Dresser le tableau de variation de f.

Série d'exercices : Généralités des fonctions Série 1

EXERCICE N°9

Un triangle isocèle ABC a pour base [BC] telle que BC=6 et pour hauteur [AH] telle que AH=5. Considérons sur [AH] un point M et posons AM=x

La parallèle à (BC) passant par M coupe [AB] en I et [AC] en J.

1°) Calculer la langueur IJ en fonction de x.

2°) a) Désignons par y l'aire du triangle AIJ. Exprimer y en fonction de x lorsque M décrit [AH] .

b) Soit f la fonction qui à x associe y. Préciser l'ensemble de définition de f.

c) Etudier les variations de f.

EXERCICE N°10

ABC est un triangle isocèle tel que AB=AC=5 et BC=6, par un point D de [AB], tracez la parallèle à (BC) ; elle coupe (AC) en E. on pose AD=x.

1°) Calculer BD, EC, ED en fonction de x

2°) Désignons par y le périmètre du trapèze BDEC. Exprimer y en fonction de x.

Représentez graphiquement la fonction f définie sur $|0,5|$, qui à x associe y.

3°) La hauteur du triangle ABC, issue de A, coupe [DE] en I et [BC] en H.

a) Calculer AH.

b) Calculer, en fonction de x, l'aire z du trapèze BDEC.

c) Etudier la fonction g définie sur [0 ; 5] qui à x associe z.

EXERCICE N°11

Un triangle ABC, de hauteur[AH], est tel que AB=5, BC=8, AH=4. Construisez un tel triangle. Par un point K de [AH] , menez la parallèle à (BC) qui coupe respectivement [AB]

Et [AC] en M et N.

Soit P et Q les projetés orthogonaux respectifs de M et N sur (BC).posons **AK=x**

1°) Calculer, en fonction de x, le périmètre, noté **p(x)**, du rectangle **MNPQ**

Etudier les variations de la fonction **p** et tracez sa courbe représentative.

2°) Calculer en fonction de x paire, notée **a(x)**, du rectangle **MNPQ**.

Etudier les variations de la fonction **a** et tracez sa courbe représentative.

3°) Déterminer x pour que l'aire du rectangle soit maximale. Calculer ce maximum

EXERCICE N°12

ABCD est un trapèze isocèle de bases [AB] et [CD] tel que : AB=12, BC=5 et CD=6.

Soit M un point de [AD]. La parallèle à (AB) passant par M coupe (BC) en N. soit H le projeté orthogonal de C sur [AB] et E le point d'intersection de (CH) et (MN). Posons AM=x.

1°) Montrer que : $\mathbf{EN = \frac{3}{5}(5-x)}$ et $\mathbf{EH = \frac{4}{5}x}$. en déduire que $\mathbf{MN = \frac{6}{5}(10-x)}$

2°) Désignons par y l'aire du trapèze MNBA.

a/ Exprimer y en fonction de x.

b/ Etudier les variations de la fonction f, définie sur $[0;5]$, qui à x associe y et tracez sa courbe représentative

EXERCICE N°13

Soit **f** la fonction de **R+** dans **R** définie par : $\begin{cases} \mathbf{f(x) = x - 10 \quad pour\ x} > 100 \\ \mathbf{f(x) = f(f(x+11)) \quad pour\ x \leq 100} \end{cases}$

1°) (a) Calculer f(100) , f(99)

(b) Calculer f(x) pour x entiers naturels, inférieurs au égaux à 100.

2°) Tracer la courbe représentative de la fonction f.

EXERCICE N°14

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{I} = [\mathbf{0};\mathbf{1}]$ et à valeurs dans I telle que, pour tous x et y réels de I :

$|\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(y)}| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

1°) Montrer que u et v sont des exemples de telles fonctions telle que :

$\mathbf{U : I \to R , x \to x}$ et $\mathbf{v : I \to R , x \to 1 - x}$

2°) Montrer que l'on a : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \text{et} \\ f(1) = 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(0) = 1 \\ \text{et} \\ f(1) = 0 \end{cases}$

3°) On suppose que f(0)=0.

(a) Démontrer que, pour tout x de **I** , f(x) ≥ x.

(b) Démontrer que , pour tout x de **I** , f(x)=x

4°) Examiner le cas au f(0)=1.

5°) Déduire de cette étude que les seules fonctions satisfont à la condition énoncée sont les fonctions **U** et **V**

6°) Montrer que chacune des fonctions $\mathbf{: x \to \frac{x^2}{2} , x \to \frac{x^2}{3}}$ **et** $\mathbf{x \to \frac{1}{1+x}}$ est définie sur $[0;1]$ est à valeurs dans $[0;1]$ vérifie :

$|\mathbf{f(x)} - \mathbf{f(y)}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ pour tous x et y réels de $[0;1]$

Série d'exercices : Généralités des fonctions Série 1

EXERCICE N°15

Soit **f** la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

On pose : **g(x)=2f(x)-f(x-1)** et **h(x)=g(x-1) +2g(x-2) +…+2009+g(x-2009).**

Calculer **h** ($\sqrt{\mathbf{2009}}$).

EXERCICE N°16

On désigne par E(x) : la partie entière de nombre réel x

1°) Montrer que, pour tout réel x **: $2E(x) \leq E(2x) \leq 1 + 2E(x)$**

2°) Montrer que , pour tout réel x : $\mathbf{E\left(\frac{E(2x)}{2}\right) = E(x)}$

EXERCICE N°17

La figure 2 est la représentation graphique d'une fonction u définie sur R. les deux autres courbes sont les représentations graphiques de deux fonctions f et g définies sur R telles que : f(x) = u(x+a) et g(x) = u(x)+b ou a et b sont des réels.

Trouver les courbes représentatives des fonctions f et g et donner la valeur des réels a et b.

Figure 1

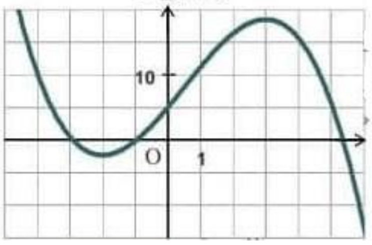


Figure 2

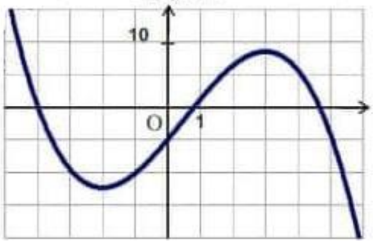
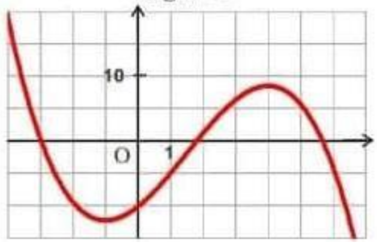


Figure 3

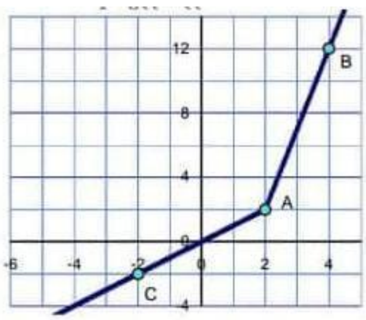


EXERCICE N°18

F est une fonction affine par morceaux définie sur R telle que

$f(x)=a|2-x| + bx+c$

1. Déterminer les réels a , b et c sachant que la courbe représentation de la fonction f est donné ci-contre.
2. Exprimer f (x) sans utiliser la notation valeur absolue.



BON TRAVAIL ☺

Bon travail