FICHE RÉSUMÉE : PRODUIT SALAIRE DANS LE PLAN

CLASSE : 3$^{\text{IÉME}}$ SECONDAIRE /SECTION : SCIENCES EXP ET MATHS

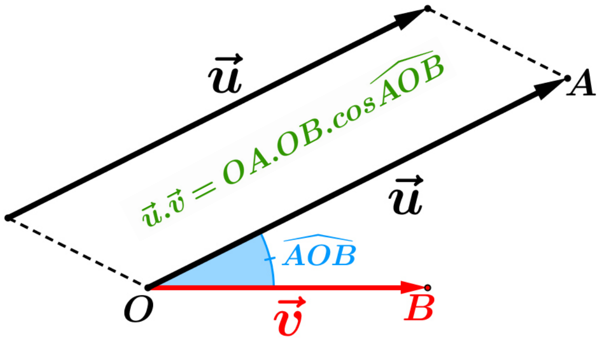
PROF :BELLASSOUED MOHAMED /ANNÉE SCOLAIRE 2020-2021

EducMath

Produit salaire dans le plan

Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs

A et B deux points du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$



$\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\cdot OB\cdot\cos\widehat{AOB}$

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\cdot\vec{v}$; le réel ainsi défini :

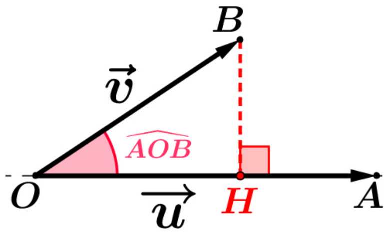
Définition

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=OA\cdot OB\cdot\cos\widehat{AOB}$;si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$;si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

$\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}=\left\|\vec{u}\right\|^2$: Le carré salaire de $\vec{u}$

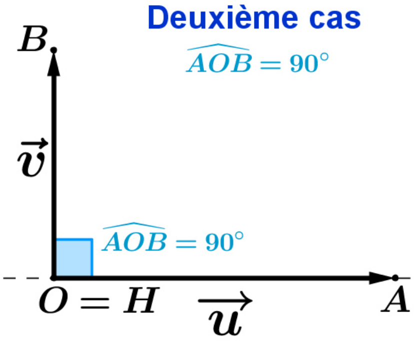
Produit salaire et projetion orthogonale

Premier cas — $\widehat{AOB}$ angle aigu



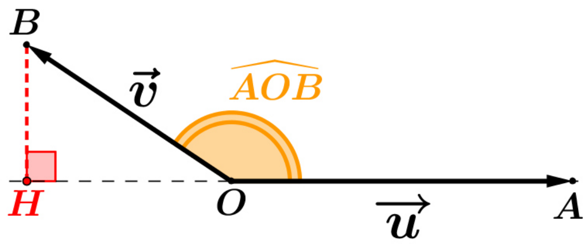
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
$=OA\cdot OH$

Deuxième cas — $\widehat{AOB}=90°$



$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

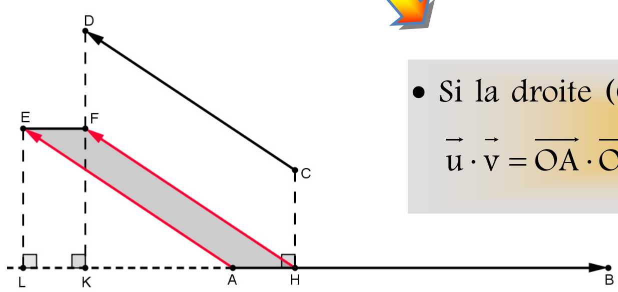
Troisième cas — $\widehat{AOB}$ angle obtus



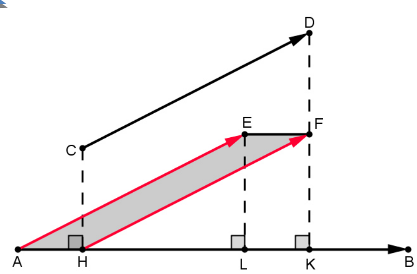
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}$
$=-OA\cdot OH$

- Si la droite (OA) est muni du repére $(O;\vec{i})$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OH}=\underbrace{\overline{OA}}_{x_A}\cdot\underbrace{\overline{OH}}_{x_H}=x_A\cdot x_H$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$

Pour les deux figures on a :

~ les deux vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HF}$ sont représentants du vecteur $\overrightarrow{CD}$

~ Les points H , L et K sont les projetés orthogonaux des points C, E et D successivement sur la droite (AB)

Preuve : $\begin{cases}\bullet(CH)//(DK)\\ \bullet(CH)//(DF)\end{cases}\Rightarrow F\in(DK)\Rightarrow EFKL \text{ est un rectangle}\Rightarrow\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{KL}$

$\bullet\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{KL}$; or $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{HA}$ donc : $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{HA}$

$\begin{cases}\bullet\ \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AL}\\ \bullet\ \overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{HK}\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$

Ainsi : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HK}$

Propriétés du Produit scalaire et conséquences

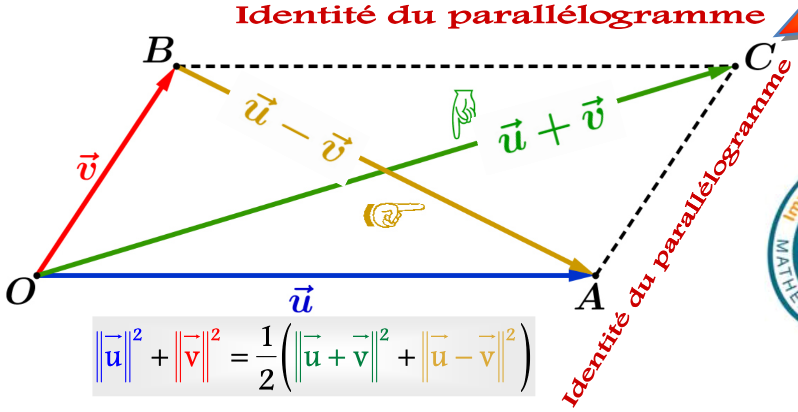
- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ • $\vec{u}\cdot\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$;α est un réel
- $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|\leq\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|$: **Inégalité de Cauchy-Schwartz**
- $\left(\alpha\vec{u}\right)\cdot\left(\beta\vec{v}\right)=\alpha\beta\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$;α et β deux réels
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ **Proprietés**
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{w}+\vec{t}\right)=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{u}\cdot\vec{t}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{t}$

Identités remarquables

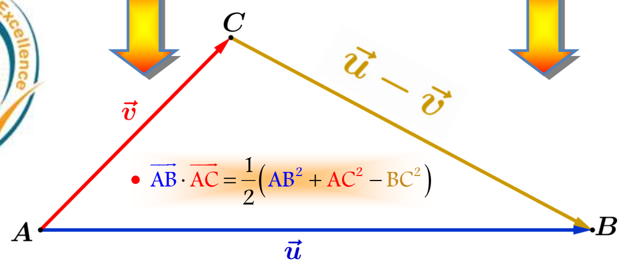
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}\right\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2$

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$

Identité du parallélogramme



$$\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2+\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$$



- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Soit $d=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

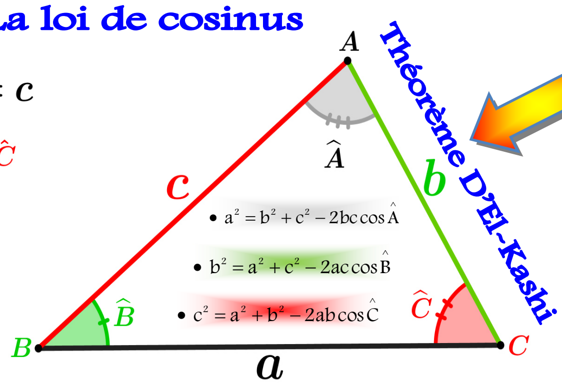
- Si $d=0\Leftrightarrow$ ABC est rectangle en A
- Si $d\neq0$: Le réel $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ mesure le défaut d'orthogonalité de l'angle $\hat{ABC}$

Théorème D'El-Kashi : La loi de cosinus

$BC=a \quad AC=b \quad AB=c$

$\widehat{BAC}=\hat{A} \quad \widehat{ABC}=\hat{B} \quad \widehat{ACB}=\hat{C}$

- $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$
- $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B}$
- $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C}$



Vecteurs orthogonaux-Vecteurs colinéaires

Définition Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leurs produit scalaire nul et on note : $\vec{u}\perp\vec{v}$

- Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur . • $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- Deux droites sont perpendiculaires ; si et seulement si , le produit scalaire de leurs vecteurs Directeurs est nul : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs Directeurs de Δ et Δ'respeccctivement : $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
- $\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\Leftrightarrow\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Expression analytique du Produit scalaire dans une base orthonormée

- Soit $\left(\vec{i};\vec{j}\right)$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs

Pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de compsantes respectives $\left(x,y\right)$ et $\left(x',y'\right)$: $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$