L'ensemble des entiers naturels et notios en arithmétique

I. L'ensemble des entiers naturels:

Activité1 :

Dans les années vingt du $20^{ème}$ siècle, PEANO(mathématicien italien vécu entre 1885 et 1932) a utilisé la lettre N pour exprimer l'ensemble que contient tous les entiers naturels comme 0 ;1 ;2 ;3 ;……ect.

Ce Symbole sera remplacé par le symbole $\mathbb{N}$. En plus, il invente le symbole $\in$ qui exprimer l'appartenace d'un nombre à l'ensemble $\mathbb{N}$.

En utilisant l'un des deux symboles $\in$ ou $\notin$ remplacer les pointillés dans ce qui suit :

$$1124 \ldots.\mathbb{N}\ ;\ \ 15{,}2 \ldots \mathbb{N}\ ;\ \ 10^{79} \ldots.\mathbb{N};\ \frac{14748}{3} \ldots.\mathbb{N}\ ;\ \frac{2^7}{2^9} \ldots \mathbb{N}$$

Définitions et notations :

- *0,1,2,3,4 … Sont des nombres entiers naturels, ils forment un ensemble qu'on note $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5 \ldots\}$*
- *0 est un entier naturel nul.*
- *$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls, et on écrit : $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4 \ldots\}$.*
- *Tous les éléments de $\mathbb{N}^*$ appartiennent à l'ensemble $\mathbb{N}$, on dit que $\mathbb{N}^*$ inclus dans $\mathbb{N}$, et on écrit $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$, $(\mathbb{N} \not\subset \mathbb{N}^*)$.*
- *Si un nombre a appartient à $\mathbb{N}$, on écrit $a \in \mathbb{N}$ sinon $a \notin \mathbb{N}$.*

Exemples :

$2 \in \mathbb{N}$; $2019 \in \mathbb{N}^*$; $-6 \notin \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}^*$

Exercice 1:

En utilisant l'un des deux symboles $\in$ ou $\notin$ remplacer les pointillés dans ce qui suit :

$11 - (12 + 4) \ldots.\mathbb{N}\ ;\ \sqrt{324} - 18 \ldots \mathbb{N}^*\ ;\ 10^{79} \ldots.\mathbb{N};\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \ldots.\mathbb{N}^*.$

II. Diviseurs – Multiples d'un entier naturel:

1. Diviseurs d'un entier naturel :

Activité2 :

1. *En utilisant une machine à calculer, trouvez deux entiers naturels x et y tels que : $915378 = 985x + y$ et $y < 985$.*
2. *A-t-on : $\frac{915378}{985} \in \mathbb{N}$? justifiez la réponse.*
3. *Est-ce que l'entier 985 divise l'entier 9153780?*

Définition2 :

Soient a et b deux entiers naturels, a est non nul.
On dira que a divise b si et seulement si $\frac{b}{a} \in \mathbb{N}$, si a divise b on écrit $a\ /\ b$.

Remarques :

si a divise b , on dit aussi que :

- a est un diviseur de b
- b est divisible par a
- On désigne par D_b l'ensemble de tous les diviseurs de b
- 1 divise tous les entiers naturels .

Exemples :

- 3 est un diviseur de 21 car on a $\frac{21}{3} = 3 \in \mathbb{N}$, on écrit $3 / 21$
- $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$l'ensemble de tous les diviseurs de 24 .

Exercice 2:

Déterminer : $D_{49}; D_{64}$.

2. Multiples d'un entier naturel :

Activité3 :

1. *Montrer que le nombre entier naturel* 23 *divise le nombre entier naturel 11914.*
2. *Le nombre entier naturel* 11915 *est-il un multiple de* 23? Justifiez la réponse.

Définition3 :

> Soient a et b deux entiers naturels, a est non nul.
> On dira que a est un multiple de b si et seulement si b divise a .

Remarques :

- 0 est un multiple de tous les entiers naturels.
- Tout entier naturel non nul n admet une infinité des multiples.

Exemples :

- 24 est un multiple de 6 car on a 6 divise 24 ($\frac{24}{6} = 4 \in \mathbb{N}$).
- Les multiples de 3 sont : 0; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; ... ...

Exercice3 :

1. Calculer le produit 7645×3489.
2. Est-ce que le nombre 26673406 est un multiple du nombre3489.

3. Les Nombres pairs- les Nombres impaires :

Définition4 :

> soit n un entier naturel . On dit que n est :
> - Pair s'il est divisible par 2 ; c'est-à dire $\frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.
> - Impair s'il n'est pas divisible par 2.

Remarques :

- Tout entier naturel et soit Pair ou Impaire.
- Notons $\mathbb{I}$ l'ensemble des nombres impair, et $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombers pair, on a $\mathbb{N} = \mathbb{I} \cup \mathbb{P}$.($\mathbb{I} \cap \mathbb{P} = \emptyset$).

Exemples :

- 0, 2, 4, 6 .... Sont des nombers pairs.
- 1, 3, 5, 7 .... Sont des nombers impairs.

Exercice4 :

1. Déterminer la parité de chacun de ces nombres suivants : $69; 48; 27; 1260; 1789$.
2. Déterminer la parité de chacun de ces nombres suivants : $69 - 48$; $48 + 1260$
   $48 \times 1260; 1789 \times 1260$.

Rappel : (Critére de la divisibilité)

soit n un nombre entier naturel , n est divisible par :

- 2 si et seulement si son nombre d'unités est pair (0, 2, 4, 6 ou 8).
- 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 .
- 4 si et seulement si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible par 4.
- 5 si et seulement si son nombre d'unités est : 0 ou 5.
- 9 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 9 .

Exemples :

Le nombre 4750 est divisible par 5 car son nombre d'unités est 5.

Le nombre 4725 est divisible par 3 et 9 car le nombre $18 = 4 + 7 + 2 + 5$ est un multiple de 3 et de9.

Le nombre 1248 est divisible par 2 car son nombre d'unités est 2.

Le nombre 1628 est un multiple de 4 car le nombre 28 formé par ces deux derniers chiffres est un multiple de 4.

4. Nombres Premiers :

Activité4 :

1. *Combien de diviseurs possède le nombre entier naturel* 28?
2. *Combien de diviseurs possède le nombre entier naturel* 13?
3. *Soient p et q deux entiers naturels tels que $pq \leq 100$. Montrer que l'un des entiers p ou q est inférieur à 10. En déduire tous les entiers naturels qui ont deux diviseurs seulement et inférieurs à 100.*

Définition 5:

- Soit p entier naturel différent de 1.

p est dit premier si seulement si p ne possède que deux diviseurs 1 et lui-même.

- Soit q un entier naturel différent de 1 est inférieur à 100.

Si q n'est pas premier alors il sera divisible par 2 ou 3 ou 5 ou 7.

Exemples :

Les nombres premiers inférieurs à 100 sont:

$2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 91; 97$

➢ *Comment reconnaitre qu'un nombre est premier :*

Exemple :

217 est-il un nombre premier ?

On a : $\sqrt{217} = 14,7309 \ldots$ alors$14^2 < 217 < 15^2$.

Les nombres premiers inférieurs ou égales à 14 sont 2,3,5,7,11,13.

Si l'un de ces nombres divise 217, alors 217 c'est un nombre composé. Sinon, 217 est premier.

On a 2, 3,5 ne divise 217 mais 7 divise 217

Alors 217 est un nombre composé.

Exercice5 :

1. Montrer que le nombre 137 n'admet pas de diviseurs inférieurs à 12 autres que 1.
2. En déduire que le nombre 137 est premier.

III. Le plus grande commun diviseur de deux nombres- Le plus petit commun multiple de deux nombres :

1. Le plus grande commun diviseur de deux nombres:

Activité5 :

1. Déterminer tous les diviseurs de 15 et 24 .
2. Déterminer le plus grande diviseur commun de 15 et 24 .

Définition6 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- Le plus grande commun diviseur de deux entiers naturels a et b est le plus grande diviseur commun non nul de a et b; on le note généralement $PGCD(a,b)$ ou $a \wedge b$.

Exemple:

Ona $D_{24} = \{1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24\}$ et $D_{36} = \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36\}$

Donc $\text{PGCD}(24; 36) = 12$.

2. Le plus petit commun multiple de deux nombres :

Activité6 :

1. Déterminer tous les multiples de 12 et 15 inférieurs à 200.
2. Quel est le plus petit commun multiple de 12 et 15 ?

Définition7 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls.

- Le plus petit commun multiple de deux entiers naturels a et b est le plus petit multiple commun non nul de a et b ; on le note généralement $PPCM(a,b)$ ou $a \vee b$.

Exemple:

Ona $M_{24} = \{0; 24; 48; 72; 96; 120; 144; 168; \dots\}$ et $M_{36} = \{0; 36; 72; 108; 144; 180; \dots\}$

Donc $\text{PGCD}(24; 36) = 72$.

Exercice6 :

1. Déterminer $PGCD(28,35)$. .
2. Déterminer $PPCM(28,35)$.

IV. Décomposition en facteurs premiers:

Activité7 :

1. Le nombre 391 admet-il un diviseur qui est premier.
2. Déterminer tous les diviseurs premiers du nombre entier naturel 138.

3. Ecrire 138 sous la forme d'un produit des nombres premiers.

Théorème 1 : (Théorème Fondamentel D'arithmétique)

Tout entier naturel non premier se décompose en un produit des facteurs premiers, cette décomposition est unique.

Exemple :

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

Donc : $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

Exercice7 :

Décomposer 840 et 2220 en produit des facteurs premiers.

Propriété 1 :

- Le PGCD de deux entiers naturels a *et* b est le produit des facteurs premiers communs apparaissant à la fois dans la décomposition en facteurs premiers de a *et* b munis de plus petit des exposants trouvés à la décomposition.
- Le PPCM de deux entiers naturels a *et* b est le produit des facteurs premiers apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de a *et* b munis de plus grand des exposants trouvés aux décomposition de a *et* b.

Exemple :

Soient $a = 2^3 \times 3^2 \times 5$ *et* $b = 2^2 \times 3^3 \times 7^2$

Alors : $PGCD(a;b) = 2^2 \times 3^2$ et : $PPCM(a;b) = 2^3 \times 3^3 \times 7^2 \times 5$

Exercice 8:

On pose $a = 1612$ et $b = 2356$

1. Décomposer a *et* b.
2. Déterminer le $ppcm(a;b)$ *et* $pgcd(a;b)$.
3. Simplifier : $\frac{a}{b}$ *et* $\sqrt{ab}$.

- ***L'algorithme d'Euclide : recherche de PGCD :***

Exemple :

Déterminer le PGCD (216 ; 84)

$$216 = 84 \times 2 + 48$$
$$84 = 48 \times 1 + 36$$
$$48 = 36 \times 1 + 12$$
$$36 = 12 \times 3 + 0$$

Conclusion : $PGCD(216; 84) = 12$, le dernier reste non nul.

Exercice :

On utilisant algorithme d'Euclide, déterminé le $PGCD(1275; 575)$.

Culture Mathématique :

En mathématiques, on appelle conjecture, une règle qui n'a jamais été prouvée. On a vérifié qu'elle est vraie sur beaucoup d'exemples mais on n'est pas sûr qu'elle soit toujours vraie.

C'est le cas de la *conjecture de Goldbach* découverte par le mathématicien russe *Christian Goldbach* (1690 ; 1764). Dans un courrier adressé à Leonhard Euler en 1742 Goldbach soumet sa conjecture. De nombreux mathématiciens ont cherché et cherchent encore à l'expliquer, mais pour l'instant personne n'y est encore arrivé.

Après la conjecture de Fermat qui a été démontrée en 1995 par Andrew Wiles, devenu aujourd'hui célèbre, la *conjecture de Goldbach* se place avec l'hypothèse de Riemann et la conjecture des nombres premiers jumeaux le numéro 8 des problèmes de Hilbert, énoncés par celui-ci en 1900.

La conjecture de Goldbach :

Tout nombre pair supérieur à 3 est la somme de deux nombres premiers.

Exemples :

4 = 2 + 2		(1 solution)
6 = 3 + 3		(1 solution)
8 = 3 + 5		(1 solution)
10 = 3 + 7	= 5 + 5	(2 solutions)
12 = 5 + 7		(1 solution)
14 = 3 + 11	= 7 + 7	(2 solutions)

50 = 19 + 31 = 13 + 37 = 7 + 43 = 3 + 47 (4 solutions)

Exemple d'olympiade : (l'Olympiade 1988 à Canberra, Australie)

Soient a et b deux entiers naturels tels que : $ab + 1/a^2 + b^2$.

Montrer que $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait.

Sujet à chercher :

- L'ensemble des nombres premier.
- L'arithmétique d'Euclide.
- Nombre de diviseurs d'un entier naturel.
- Lemme d'Euclide.
- Lemme de Gauss.
- Identité de Bézout.
- Diphante d'Alexandrie.
- Division Euclidienne.
- Grand Théorème de Fermat.
- Conjecture des nombres premiers jumeaux.