Lycée Pilote Sousse Date : 05/03/2019	Devoir de Synthèse N°2 Durée : 3 heures	Classes : 4ème sc. Exp

Exercice 1 : (7 points)

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2+2x-4z-31=0$ ..

1- Déterminer le centre I et le rayon R de (S).

2) Soit le point $J(1,-1,0)$ *et* P l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{JI}.\overrightarrow{JM}=0$.

a- Justifier que P est le plan d'équation : $2x-y-2z-3=0$.

b- Montrer que l'intersection $(S)\cap P$ est le cercle (C) de centre J et de rayon $r=3\sqrt{3}$.

c- Déterminer les équations des plans parallèles à P et tangents à la sphère (S).

3- Soit la droite Δ: $\begin{cases} x=2+\alpha \\ y=1 \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

a) Vérifier que Δ est une droite du plan P.

b) Déterminer la distance du point I à la droite Δ .

c) Déduire que la droite Δ coupe la sphère (S) en deux points distincts E *et* F que l'on précisera.

4- Soit le point $A(-5,2,6)$ et M un point du cercle (C) .

a) Vérifier que A est un point de la droite (IJ).

b) Justifier que le triangle AJM est rectangle en J.

d) Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S') de centre A et dont l'intersection avec le plan P est le cercle (C).

Exercice 2 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. On désigne par (ζ) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité graphique : 2 centimètres).

1- a) Justifier que f est dérivable sur $[0,1[$ et que $f'(x)=\frac{x(2-x^2)}{\sqrt{1-x^2}^3}$.

b) Etudier les variations de f.

c) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de (ζ) et la droite $\Delta:y=x$.

2- a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer dans le même repère les courbe (ζ) de f et (ζ') de f^{-1}.

$\frac{1}{4n+2}$ $\quad$ n $\quad$ $= J - \frac{\pi}{4}$ $\quad$ Limite de U_n : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: 1

3- Soit : F la fonction définie sur $[0,1]$ par $F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt$.

G la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $G(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt$

a) Justifier que F est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer $F'(x)$.

b) En déduire que G est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ puis exprimer $G'(x)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; $G(x) = \frac{2x+\sin(2x)}{4}$.

4- a) Vérifier que $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$.

b) A l'aide d'une intégration par parties calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\, dx$.

5- On désigne par A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par les courbes (ζ) , (ζ') et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a) Montrer que $A = (4-\pi)\ cm^2$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)\, dx$.

Exercice 3 (6 points)

1- Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = \tan x$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

c) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$ et en déduire que $J = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = 1 - \frac{\pi}{4}$.

2- Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{\pi}{4}$ et $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\, dt$; $n \geq 1$

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$; $0 \leq U_{n+1} \leq U_n$. En déduire que (U_n) est convergente.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$; $\frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3- a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$; $U_{n-1} + U_n = \frac{1}{2n-1}$.

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$; $\frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{4n-2}$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$.

4- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$. On note (ζ) la courbe de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit A le point d'abscisse 1 de la courbe (ζ).

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on fait tourner l'arc $[OA]$ de la courbe (ζ) autours de l'axe des abscisses , On obtient un solide (S). Calculer le volume de (S).

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $F'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $F(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) + c$

$= \frac{-1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + c$

$\Rightarrow F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \underbrace{\frac{1}{4}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + c$

$\Rightarrow \int_0^{\cos\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{-\pi}{4} + C$

$\Rightarrow 0 = \frac{-\pi}{4} + C$

$\Rightarrow C = \frac{\pi}{4}$

donc $F(x) = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{\pi}{4}$

Exercice 2: D.S.2 ; L.P.S

05.02.2019

1.a. $x \mapsto 1 - x^2$ est poly ; dvb positive sur $[0,1[$; donc $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dvb sur $[0,1[$ et elle ne s'annule pas sur $[0,1[$

donc f est dvb sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2} - \left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot x^2}{\sqrt{1-x^2}^{\,2}}$

$= \dfrac{\frac{2x(1-x^2)+x^3}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^{\,2}}$

$= \dfrac{2x - 2x^3 + x^3}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$

$= \dfrac{2x - x^3}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$

$= \dfrac{x(2-x^2)}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}}$

b. $\forall x \in [0,1[$, $f'(x) = \dfrac{x(2-x^2)}{\sqrt{1-x^2}^{\,3}} \geq 0$

(car $\forall x \in [0,1[$ $x \geq 0$ et $x^2 < 1 < 2$)

x	0		1
$f'(x)$	0	$+$	‖
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 \to 1}{\sqrt{1-x^2} \to 0^+} = +\infty$

c. $f(x) = x$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x$

$\Leftrightarrow x^2 = x\sqrt{1-x^2}$

$\Leftrightarrow x^2 - x\sqrt{1-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x - \sqrt{1-x^2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - \sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow x - \sqrt{1-x^2} = 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{1-x^2}$ et $x \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2$ $\quad x \geq 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 1$ $\quad x \geq 0$

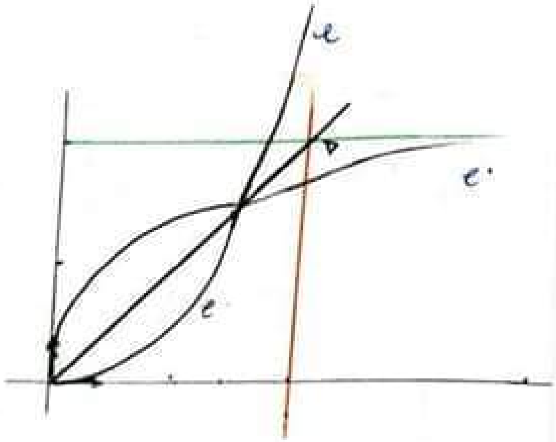
$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$ $\quad x \geq 0$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad x \geq 0$

donc $C_f \cap \Delta = \{O(0,0) ; A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$

2.a. f continue strictement croissante sur $[0,1[$ donc f réalise une bijection de $[0,1[$ sur $f([0,1[) = [f(0), \lim_{x\to 1^-} f(x)[= [0,+\infty[$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0,+\infty[$



3. a.

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt.$$

On pose $\varphi(t) = \sqrt{1-t^2}$ pour $t \in [0,1]$

$t \mapsto 1-t^2$ poly continue positive sur $[0,1]$

donc $\varphi : x \mapsto \sqrt{1-t^2}$ continue sur $[0,1]$

et $0 \in [0,1]$ donc F est la primitive de φ sur $[0,1]$ qui s'annule en 0

donc F est dvb sur $[0,1[$ et

$\forall x \in [0,1[$; $F'(x) = \varphi(x) = \sqrt{1-x^2}$

b. $\forall x \in [0,\frac{\pi}{4}]$

$$G(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\, dt = F(\sin x)$$

$\begin{cases} x \mapsto \sin x \text{ est dvb sur } [0,\frac{\pi}{4}] \\ \text{et } \forall x \in [0,\frac{\pi}{4}] : \sin x \in [0,1[\\ \text{et } F \text{ est dvb sur } [0,1[\end{cases}$

donc $x \mapsto F(\sin x)$ est dvb sur $[0,\frac{\pi}{4}]$

donc G est dvb sur $[0,\frac{\pi}{4}]$

et $\forall x \in [0,\frac{\pi}{4}]$

$$G'(x) = \sin'(x)\, F'(\sin x) = \cos x \sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x \sqrt{\cos^2 x} = \cos x\, |\cos x| = \cos^2 x.$$

c. $\forall x \in [0,\frac{\pi}{4}]$ $G'(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

$G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right) + c$; c Cste

$\Rightarrow G(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{4}\sin 0 + c$

$\Rightarrow \int_0^{\sin 0} \sqrt{1-t^2}\, dt = c$

$\rightarrow c = \int_0^0 \sqrt{1-t^2}\, dt = 0$

$\rightarrow G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$

$\rightarrow G(x) = \dfrac{2x + \sin(2x)}{4}$

4. a.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\sin\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-t^2}\, dt = G\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\times\frac{\pi}{4} + \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

b.

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \dfrac{-1}{2} \times 2\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$I = -\left[x\sqrt{1-x^2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 0\right) + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

5.a. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$; donc l'aire A est deux fois l'aire de la partie du plan limité par $(\mathcal{C})$ et les droites d'éq $y = x$, $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$A = 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} |f(x) - x|\,dx \text{ (u A)}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x - f(x))\,dx \text{ (u a)}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\,dx - 2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2I$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 0^2 - 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

on l'unité graphique est 2cm donc l'aire de A en cm^2 est

$$A = 2 \times 2 \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ cm^2$$

$$= 4\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\ cm^2$$

$$= 4 - \pi\ cm^2.$$

b. $K = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f^{-1}(x)\,dx$

f^{-1} est continue positive sur $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (car $\mathcal{C}'$ au dessus de $0, \vec{i}$)

donc K represente l'aire en unité d'aire de la partie du plan D limitée par $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équation $x = 0$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = 0$

donc $K = A(D)$ (1)

soit D_1 la partie du plan limitée par $(\mathcal{C}')$ et les droites d'éq $x = 0$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = x$

et D_2 la partie du plan limité par les droites $y = x$, $x = 0$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $y = 0$

on a $A(D) = A(D_1) + A(D_2)$ (2)

$(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ sont symétriques par rapport à $\Delta : y = x$ donc l'aire D_1 est $\frac{1}{2}$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

donc $A(D_1) = \frac{1}{2}A$ (3)

$$A(D_2) = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow A(D_2) = \frac{1}{4} \quad (4)$$

(1), (2), (3) et (4) $\Rightarrow K = \frac{1}{2}A + \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{\pi}{8}$$

Exercice 3

1) a.

g est dvb sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$g'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x$

$= \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\overbrace{\sin x}^{\to -1}}{\underbrace{\cos x}_{\to 0^+}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

g est continue strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $g(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+}, \lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2})^-}[= \mathbb{R}$

donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b. g est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\begin{cases} g \text{ est dvb sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \text{et } \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\; ; \; g'(x) \neq 0 \end{cases}$

alors g^{-1} est dvb sur $g(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$

et on a $\forall x \in \mathbb{R}$; $(g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{g'(g^{-1}(x))}$

$= \dfrac{1}{g'(y)}$; $y = g^{-1}(x)$

$= \dfrac{1}{1 + \tan^2 y}$ (1)

or $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x$

$\Leftrightarrow \tan y = x$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \; (g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

c. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$= \displaystyle\int_0^1 (g^{-1})'(t)\,dt$

$= [g^{-1}(t)]_0^1$

$= g^{-1}(1) - g^{-1}(0)$

$= \dfrac{\pi}{4}$

$J = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{t^2+1}\,dt$

$= \displaystyle\int_0^1 1\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$= [t]_0^1 - I$

$= 1 - \dfrac{\pi}{4}$

2.a.

$\forall n \geq 1$;

$U_{n+1} - U_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2(n+1)}}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt$

$= \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} - \frac{t^{2n}}{1+t^2}\right) dt$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2}\,dt$

$\forall t \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$\begin{cases} t^{2n} \geq 0 \\ t^2 - 1 \leq 0 \\ 1 + t^2 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2} \leq 0$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}(t^2-1)}{1+t^2}\,dt \leq 0$

$\Rightarrow U_{n+1} - U_n \leq 0$

$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$ (1)