Lycée O. chatti .Msaken	Devoir de Contrôle N°01	Prof : KARMOUS
Année Scolaire : 2010/2011		Niveau : 4$^{\text{éme}}$Math

Exercice N°1 : (4 pts)

A] Dans chacune des questions suivantes, une seule réponse correcte indiquer là.

1) On considère la suite (V_n) définie sur IN* par $V_n = n\tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$

a) $\lim V_n = \dfrac{\pi}{2}$; b) $\lim V_n = \dfrac{2}{\pi}$; c) $\lim V_n = 1$

2) On considère la suite (W_n) définie sur IN par $W_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

a) $\lim W_n = 2$; b) $\lim W_n = +\infty$; c) $\lim W_n = \dfrac{1}{2}$

B] Soit f une fonction continue et dérivable sur son domaine de définition, son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	7

1) Donner dans chaque cas <u>le nombre</u> de solutions de l'équation :
f(x) = 0 , f(x) = 10 ,
2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(1-x^2)$

Exercice N°2 : (6 pts)

On considère la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{1+U_n^2} \end{cases}$; $n \in IN$

1) Montrer que : $\dfrac{1}{2} \le U_n < 1$; $n \in IN$

2) a) Etudier la monotonie de la suite U
b) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite .

3) a) Montrer que : $0 < 1-U_{n+1} \le \dfrac{2}{5}(1-U_n)$; $n \in IN$

b) Déduire que : $0 < 1-U_n \le \dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$; $n \in IN$ puis retrouver la limite de la suite U

4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$; $V_n = \dfrac{S_n}{n}$ et $W_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$; $n \in IN^*$

a) Montrer que : $n - \dfrac{1}{3}\left(1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n\right) \le S_n < n$; $n \in IN^*$

b) Déterminer alors ; $\lim V_n$ et $\lim W_n$

© 2010 www.devoir@t.net

Exercice N°3 : (4pts)

Soit f la fonction définie sur I = $]-\infty, 1]$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

1°) a - montrer que f est continue sur I

b – Montrer que pour tout x de I on a : $f(x) = \dfrac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$

2°) a – Montrer que f est strictement décroissante sur I

b – Determiner f (I) et f ([0,1]) .

3°) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet une unique solution α dans]0,1[

4°) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(\operatorname{tg} x) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

Etudier la continuité de g sur J .

Exercice N°4: (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté a un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A (- i) et B (i) .

Soit f l'application de P \ { A } dans P \ { B } qui a tout point M(z) associe le point M '(z') tel que : $z' = \dfrac{iz+1}{z+i}$

1°) On suppose M ≠ A et M ≠ B

a) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \equiv \dfrac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})\ [2\pi]$

b) En **déduire** l'ensemble (E) des points M(z) tels que : z' est un réel non nul .

2°) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (F) : $(iz+1)^3 = (z+i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de (F) alors z est réel .

b) Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\,tg\,\alpha}{i+tg\alpha}\right)$. En déduire les valeurs de $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tels que tg α soit une solution de (F) .

3°) Soit θ un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz + 2ie^{i\theta} - e^{2i\theta} = 0$

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixe respectives $z_1 = e^{i\theta}$ et $z_2 = 2i - e^{i\theta}$

i) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport a un point fixe que l'on précisera .

ii) trouver l'ensemble (Γ) décrit par M_1 et M_2 lorsque θ varie .

iii) Montrer que $(M_1M_2)^2 = 8(1 - \sin\theta)$. Déduire la valeur de θ pour laquelle la distance M_1M_2 est maximale .

© 2010 www.devoir@t.net

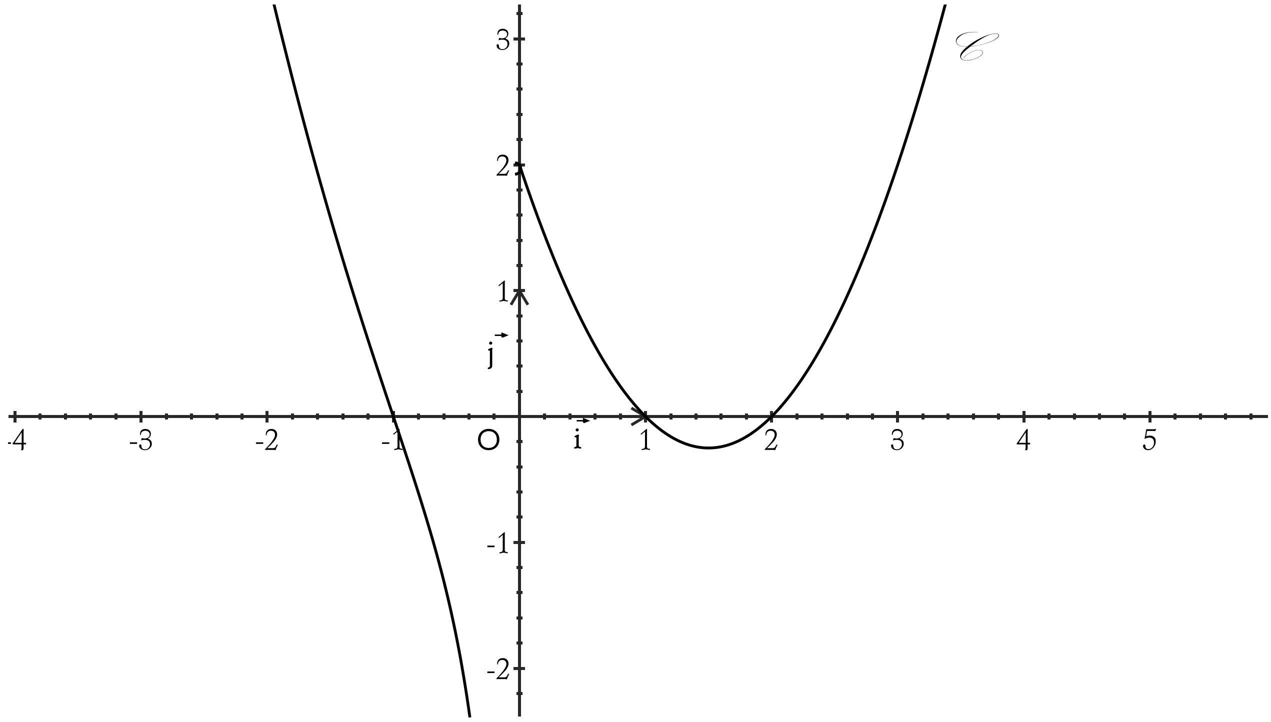
L.S.Avenue de la liberté	**DEVOIR DE CONTRÔLE N°1**
13/11/2010--------------- 4ème Math	Mathématiques ---------------------------- 3 heures
	Prof : -------------Gharbi Chaouki -------------------------

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte.
Le candidat indiquera la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

A. Le graphique ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ et telle que :

- ✓ La droite des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}$
- ✓ $\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$



1) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 1

2) Le domaine de définition de $f\circ f$ est:

a) $\mathbb{R}^*$ b) $\mathbb{R}-\{-1,1,2\}$ c) $\mathbb{R}^*-\{-1,1\}$ d) $\mathbb{R}^*-\{-1,1,2\}$

3) Le nombre de solutions de l'équation $f\circ f(x)=-x$ dans $]0,1[$ est :

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

4) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f\circ f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) 1

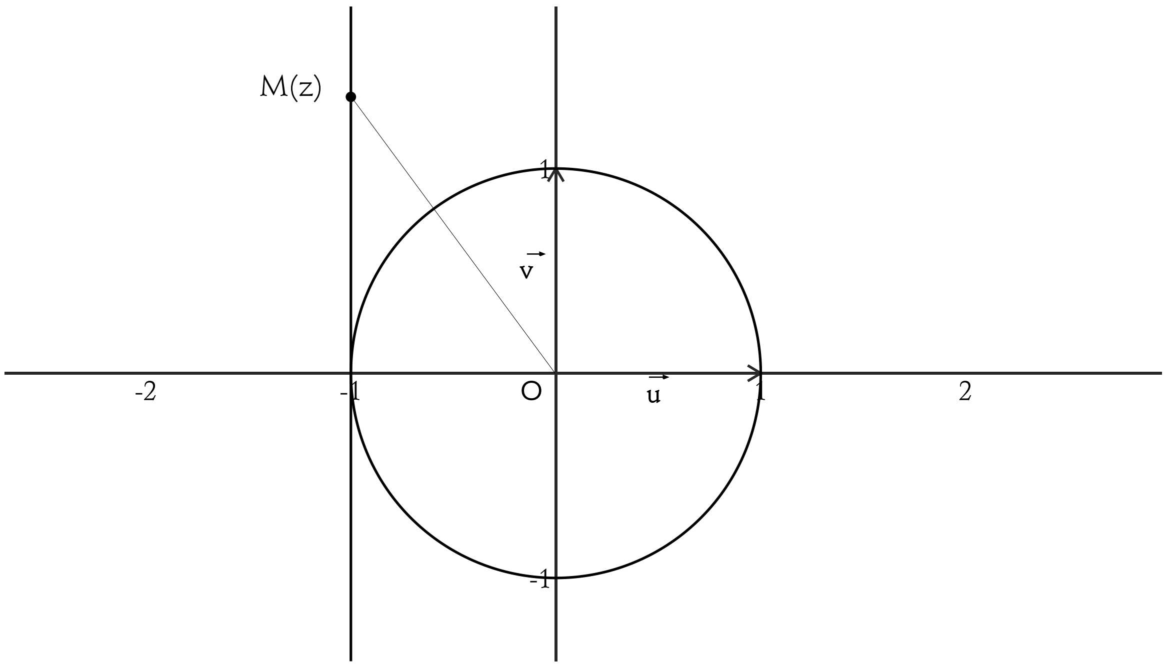
www.devoir@t.net © 2010

B. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1) Sur le graphique ci-dessous est représenté un point M d'affixe z et tel que :

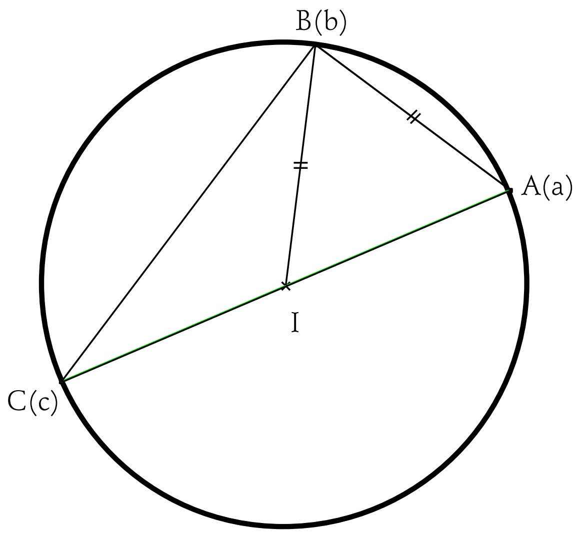
$\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\theta[2\pi]$; $\theta\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, alors la forme exponentielle de $\frac{1}{z}$ est :

a) $-\cos(\theta)\,e^{i\theta}$ b) $-\cos(\theta)\,e^{-i\theta}$ c) $\sin(\theta)\,e^{-i\theta}$ d) $\cos(\theta)\,e^{i\theta}$



2) Sur le graphique ci-dessous est représenté trois points A, B et C d'affixe respectives a, b et c sur un cercle de centre I tel que $AB=IB$, alors le nombre complexe $\frac{b-c}{b-a}$ égal à :

a) 1 b) i c) $-i\sqrt{3}$ d) 2i



© 2010 www.devoir@t.net

EXERCICE 2 : (6 points)

A. On considère, dans $\mathbb{C}$, le polynôme suivant : $P(z)=2z^3-(1+5i)z^2-(5-i)z+2i$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2-(1+3i)z-2=0$

2) Montrer que l'équation $P(z)=0$ admet, dans $\mathbb{C}$, une solution imaginaire que l'on précisera

3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z)=0$

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+i$ et $z_B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de z_A et celle de z_B.

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathscr{C}$ d'affixe $e^{i\alpha}$, $\alpha\in[0;2\pi]$.

On considère l'application f qui tout point M de $\mathscr{C}$, associe $f(M)=MA\times MB$

a) Montrer, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha}-1=2i\ \sin(\alpha)e^{i\alpha}$.

b) Montrer l'égalité suivante : $f(M)=\left|e^{i2\alpha}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$.

c) En déduire l'égalité suivante : $f(M)=\sqrt{\frac{1}{4}+\left(-\frac{3}{2}+2\sin\alpha\right)^2}$.

3) Montrer qu'il existe deux points M de $\mathscr{C}$, dont on donnera les affixes, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

4) Montrer qu'il existe un seul point M de $\mathscr{C}$, dont on donnera l'affixe, pour lequel f (M) est maximal. Donner cette valeur maximale.

EXERCICE 3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par $f(x)=\frac{2x^2+2x+1}{2x+1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f

2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2}\right\} \\ U_{n+1}=f(U_n)\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Déterminer la valeur de U_0 pour que la suite (U_n) soit constante

3) On suppose dans cette question que $U_0\geq 0$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n\geq 0$

b) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_{n+1}\geq U_n+\frac{1}{2}$

c) Montrer que la suite (U_n) est non majorée. Déduire sa limite

4) On suppose dans cette question que $U_0<-1$

a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n<-1$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

www.devoir@t.net © 2010

EXERCICE 4 : (3 points)

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante:

"Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) on a : $U_n \wedge U_p = U_n \wedge U_{p+n}$"

1) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, U_n est un diviseur de U_0 .
2) Soit r le reste de la division euclidienne de n par p $(p<n)$
   a) Montrer que $U_n \wedge U_p = U_p \wedge U_r$
   b) En déduire que : $U_n \wedge U_p = U_d \wedge U_0$ où $d = n \wedge p$
   c) Application : Soit n un entier naturel non nul et p un entier naturel impair.
   Sachant que $U_1 = 5$, déterminer le PGCD de U_{2^n+p} et $U_{2^{n+1}+p}$

EXERCICE 5 : (3 points)

Soit p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1;2;...;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.
Soit a un élément de A_p .

1) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation: $ax \equiv 1(\bmod p)$
2) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p.
   Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation: $ax \equiv 1(\bmod p)$
3) Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1(\bmod 31)$ et $3x \equiv 1(\bmod 31)$.
   A l'aide des résultats précédents résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation: $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0(\bmod 31)$.

www.devoir@t.net © 2010

Lycée Hédi Cheker Sfax | Devoir de Contrôle N° 1 4 Math(2-3-4) | 12/11/2010

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1)Soit U et V deux suites réelles définies sur IN et telles que pour tout entier n on a : $V_n = (-1)^n U_n$. Si (U_n) est convergente alors (V_n) est convergente.

2) Si $\frac{\pi}{3}$ est un argument d'un nombre complexe z alors un argument de iz^3 est$(-\frac{\pi}{3})$

3) Soit f et g deux fonctions définies sur IR. Si f est paire et g est impaire alors fog est impaire.

Exercice 2 :(6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty ; 1]$ par f(x)= $\sqrt{x^2-2x+2}+1$

1) Montrer que l'équation f(x)= 4x admet dans $]-\infty ; 1]$ une solution unique α. Vérifier que $0 \prec \alpha \prec 1$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = \frac{\alpha}{2}$ et pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = \frac{1}{4} f(U_n)$.

a) Monter que pour tout entier n ; $0 \prec U_n \prec 1$.

b)Montrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $\left|f'(x)\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que $\forall n \in IN$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{8} |U_n - \alpha|$

d) Déduire que $\forall n \in IN \quad |U_n - \alpha| \leq (\frac{\sqrt{2}}{8})^n$ puis que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit g la fonction définie sur $]0 ; \frac{\pi}{2}]$ par g(x)=f(1+cotan x)

a) Montrer que $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, g(x)=1+ $\frac{1}{\sin x}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[2 ;+\infty[$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]2 ;+\infty[$ et que pour tout $x \in]2 ;+\infty[$ on a $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

Exercice 3 (6 points)

Soit U la suite définie sur IN par $U_0 = 4$ et $U_{n+1} = \frac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1}$.

1)Montrer que $\forall n \in IN$; $3 \leq U_n \leq 4$

2) a)Montrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

3)a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$.

b) Déduire que $\forall n \in IN$, $U_n - 3 \leq (\frac{1}{2})^n$. Retrouver alors la limite de U.

4) a) Montrer que $\forall n \geq 4$; $2^n \geq n^2$.

b) Déduire que $\forall n \geq 4$; $n(U_n - 3) \leq \frac{1}{n}$.

Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} [n(U_n - 3)]$

5) On pose pour tout $n \in IN$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{6}{U_k - 1}$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2U_k}{U_k - 1}$

a) Montrer que $\forall n \in IN$; on a : $U_{n+1} = S_n - S'_n + 4$.

b) Déterminer la limite de S_n puis celle de S'_n.

Exercice 4 (5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+2i)e^{i\theta} z - (1-i)e^{2i\theta} = 0$ avec $\theta \in [0;\pi]$.

1) a)Montrer que $z_1 = ie^{i\theta}$ est une solution de (E). Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E).

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$, écrire z_2 sous forme exponentielle et sous forme cartésienne.

En déduire la valeur de $\cos(\frac{7\pi}{12})$.

2) Dans le plan complexe muni d'un ROND (o ; $\vec{u};\vec{v}$) on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $z_A = 2$, $z_B = 2 + e^{i\theta}$, $z_C = ie^{i\theta}$ et $z_D = (1+i)e^{i\theta}$

a)Déterminer et construire l'ensemble des points B lorsque θ décrit $[0, \pi]$.

b)Vérifier que pour tout $\theta \in [0;\pi]$ les points A, B et C ne sont pas alignés.

c)Montrer que ABDC est un parallélogramme.

d)Peut on déterminer θ pour que ABDC soit un losange.

Lycée secondaire ALI BOURGUIBA		2010 - 2011
Épreuve : Mathématiques	Devoir de contrôle n° 1	Durée 2 h
Prof : MAATALLAH	Le 13 - 11 - 2010	Classe : 4 M_2

EXERCICE N1 (5 points)

1/ Soit n un entier naturel non nul . Montrer que l'équation : $x^n + x^{n-1} \dots\dots\dots\dots\dots + x^2 + x - 1 = 0$ possède une unique solution dans $[\,0\ ,\ +\infty[$. On la note a_n .

2/ Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante . En déduire qu'elle converge .

3/ Montrer que , pour tout entier naturel $n \geq 2$: $a_n = \frac{1}{2} + \frac{{a_n}^{n+1}}{2}$.

4/ Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} {a_n}^{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

EXERCICE N2 (5 points)

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 + i(e^{i\theta} - 2)z + e^{i\theta} - 1 = 0$

2/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe $z_M = i - ie^{i\theta}$ lorsque θ varie dans $]\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi[$.

3/ Soit les points A(1) et B(i) et $f: P\setminus\{B\} \to P\setminus\{A\}$, $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

Montrer que si $z \neq i$ et $|z| = 1$ alors $z' \in i\mathbb{R}^*$. Montrer que $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux.

4/ a) Soit $\alpha \in]0\,,\pi[$. Montrer que si $z \neq i$ et $\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = e^{i\alpha}$ alors $z = -\cot g(\frac{\alpha}{2})$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(\bar{z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)^3$

EXERCICE N3 (4 points)

Dans le plan orienté , on considère un carré ABCD de centre I tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit E le point tel que DCE soit un triangle équilatéral de sens direct . On désigne par J, K et L les points tels que $J = A * D$, $K = B * C$ et $L = D * E$ et O le centre du cercle circonscrit au triangle DCE . I_1 est le symétrique de I par rapport à J .

1/ Soit $R = r_{(A\,,\ \frac{\pi}{2})}$, $t = t_{\overrightarrow{AB}}$, $R_1 = R \circ t$ et $R_2 = t \circ R$.

Caractériser R_1 et R_2 . On pose $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$. Montrer que $\overrightarrow{DM_1} = \overrightarrow{BM_2}$.

2/ Caractériser $t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{(AB)}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $\psi = t_{\overrightarrow{BD}} \circ S_{(AB)}$

3/ Pour tout M du plan on considère les points $M_1' = R_{(D\,,\ \frac{\pi}{3})}(M)$ et $M_2' = R_{(O\,,\ -\frac{2\pi}{3})}(M)$ .Montrer que le milieu du segment $[M_1'M_2']$ est un point fixe qu'on précisera .

EXERCICE N4 (6 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}$,si $x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

C_f est sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$.

1/ a) Montrer que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

b) Montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}[\ ,f'(x) = \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$

2/ Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ sur $]-\infty, 1]$. Soit g sa réciproque .

3/a) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 1]$ et que $\forall x \leq 1$, $g'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.

b) Ecrire une équation de la tangente T_0 à C_g au point A d'abscisse 0 puis tracer C_f , C_g , T_0 et $T_{\frac{\pi}{2}}$.

Bon travail

© 2010
www.devoir@t.net

Lycée Hédi Cheker Sfax — Devoir de Contrôle N° 1 — 4 Math(2-3-4) — 12/11/2010

Exercice 1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1)Soit U et V deux suites réelles définies sur IN et telles que pour tout entier n on a : $V_n = (-1)^n U_n$. Si (U_n) est convergente alors (V_n) est convergente.

2) Si $\frac{\pi}{3}$ est un argument d'un nombre complexe z alors un argument de iz^3 est$(-\frac{\pi}{3})$

3) Soit f et g deux fonctions définies sur IR. Si f est paire et g est impaire alors fog est impaire.

Exercice 2 :(6points)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;1]$ par $f(x)=\sqrt{x^2-2x+2}+1$

1) Montrer que l'équation f(x)= 4x admet dans $]-\infty\,;1]$ une solution unique α. Vérifier que $0 \prec \alpha \prec 1$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur IN par $U_0 = \frac{\alpha}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

$U_{n+1} = \frac{1}{4} f(U_n)$.

a) Monter que pour tout entier n ; $0 \prec U_n \prec 1$.

b)Montrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $\left|f'(x)\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Montrer que $\forall n \in IN$; $\left|U_{n+1}-\alpha\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{8} \left|U_n-\alpha\right|$

d) Déduire que $\forall n \in IN$ $\left|U_n-\alpha\right| \leq (\frac{\sqrt{2}}{8})^n$ puis que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit g la fonction définie sur $]\,0\,;\frac{\pi}{2}]$ par g(x)=f(1+cotan x)

a) Montrer que $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$, $g(x)=1+\frac{1}{\sin x}$.

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[2\,;+\infty[$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]\,2\,;+\infty[$ et que pour tout $x \in\,]\,2\,;+\infty[$ on a $(g^{-1})'(x)=\frac{-1}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$.

© 2011 www.devoir@t.net

Exercice 3 (6 points)

Soit U la suite définie sur IN par $U_0=4$ et $U_{n+1}=\dfrac{U_n^2-3U_n+6}{U_n-1}$.

1)Montrer que $\forall n\in IN$; $3\leq U_n\leq 4$

2) a)Montrer que la suite U est décroissante.

b) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

3)a) Montrer que $\forall n\in IN$ on a : $U_{n+1}-3\leq \frac{1}{2}(U_n-3)$.

b) Déduire que $\forall n\in IN$, $U_n-3\leq (\frac{1}{2})^n$. Retrouver alors la limite de U.

4) a) Montrer que $\forall n\geq 4$; $2^n\geq n^2$.

b) Déduire que $\forall n\geq 4$; $n(U_n-3)\leq \frac{1}{n}$.

Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}[n(U_n-3)]$

5) On pose pour tout $n\in IN$, $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{6}{U_k-1}$ et $S'_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{2U_k}{U_k-1}$

a) Montrer que $\forall n\in IN$; on a : $U_{n+1}=S_n-S'_n+4$.

b) Déterminer la limite de S_n puis celle de S'_n.

Exercice 4 (5 points)

On considère dans ℂ l'équation (E) : $z^2-(1+2i)e^{i\theta}z-(1-i)e^{2i\theta}=0$ avec $\theta\in[0;\pi]$.

1) a)Montrer que $z_1=ie^{i\theta}$ est une solution de (E). Déterminer alors l'autre solution z_2 de (E).

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c) Pour $\theta=\frac{\pi}{3}$, écrire z_2 sous forme exponentielle et sous forme cartésienne.

En déduire la valeur de $\cos(\frac{7\pi}{12})$.

2) Dans le plan complexe muni d'un ROND $(o\ ;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A ; B ; C et D d'affixes respectives $z_A=2$, $z_B=2+e^{i\theta}$, $z_C=ie^{i\theta}$ et $z_D=(1+i)e^{i\theta}$

a)Déterminer et construire l'ensemble des points B lorsque θ décrit $[0,\pi]$.

b)Vérifier que pour tout $\theta\in[0;\pi]$ les points A, B et C ne sont pas alignés.

c)Montrer que ABDC est un parallélogramme.

d)Peut on déterminer θ pour que ABDC soit un losange.

www.devoir@t.net © 2011

Lycée thélèpte
01 décembre 2010

Devoir de contrôle n°1

Durée : 2 heures

4ème Maths
Enseignant : H. Salem

Exercice1 : (3points)

Donner la réponse correcte . Aucune justification n'est demandée.

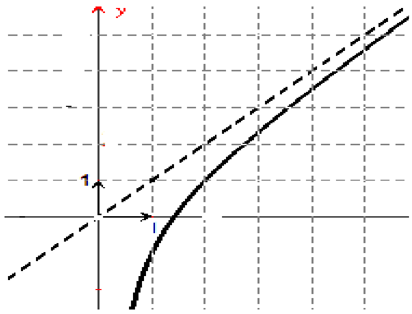
1) *La courbe* (C) *ci – dessous est la représentation graphique d'une fonction* f *définie sur* $]0,+\infty[$. *La droite* Δ *est une asymptote à* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

$\lim_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) =$:

a) 1

b) 0

c) $+\infty$



2) *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé* $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure ci – dessous, (C) *est un cercle de centre O milieu de* $[AC]$ *et B est un point de* (C) *tel que OAB est un triangle équilatérale.*

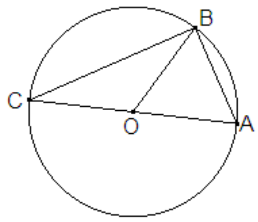
On pose a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

$\frac{b-c}{b-a} =$:

a) $-2i$

b) $-i$

c) $-i\sqrt{3}$



3) *Si une suite* (U_n) *est divergente alors l'une au moins des suites* (U_{2n}) *ou* (U_{2n+1}) *est divergente.*

a) vrai ; b) faux

Exercice 2 : (3 points)

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1) *Dresser le tableau de variation de g sur IR.*
2) *Démontrer que l'équation* $g(x) = 0$ *admet une unique solution* α *et que* $\alpha \in]1,2[$.
3) *Déterminer le signe de* $g(x)$ *sur IR.*

Exercice 3 : (6points)

On considère la suite (U_n) *défini par* $U_0 = 1$ *et pour tout entier n ;*

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{\left(1+\sqrt{U_n}\right)^2}.$$

1) a) *Montrer que pour tout entier n,* $U_n > 0$.

b) *Montrer que* (U_n) *est décroissante.*

c) *Déduire que* (U_n) *est convergente et détermine sa limite.*

2) *soit* (V_n) *défini sur* $\mathbb{N}$ *par* $V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}}$.

www.devoir@t.net © 2012

iiiiiiia) *Montrer que* (V_n) *est une suite arithmétique de raison égale à* 1.

b) *On déduire* V_n *puis* U_n *en fonction de* n *et retrouver* $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3) *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

a) *Montrer que la suite* (S_n) *est croissante.*

b) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

c) *Montrer que* $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. *En déduire que la suite* (S_n) *est convergente et donner un encadrement de sa limite.*

Exercice 4 : (**8 points**)

Pour tout réel θ *de* $]-\pi, \pi]$, *On considère la fonction* f_θ *définie par* : p

pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{e^{i\theta}\}$, $f_\theta(z) = \dfrac{1 + ze^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}$.

1) *Vérifier que si* $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ *alors* f_θ *est contante.*

2) *On pose* $\theta = 0$.

a) *Montrer que pour tous nombres complexes* z *et* z' *de* $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$:

$f_0(z) = z'$ *si et seulement si* $z = -f_0(-z')$.

b) *Montrer que pour tout* $\alpha \in IR\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f_0(e^{i\alpha}) = \dfrac{i}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$.

c) *Déterminer les raines carrés de* $\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

d) *Utiliser les questions a), b) et c) pour résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*:

$(1 + z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)(1 - z)^2$.

3) *On suppose que* $\theta \in IR \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par A, B, M *et* M' *les points d'affixesrespectives* $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}$, z *et* $z' = f_\theta(z)$

a) *Montrer que pour tout* $M \neq A$ *et* $M \neq B$, $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})[2\pi]$.

b) *Pour* $\theta = \frac{\pi}{4}$, *déterminer et construire l'ensemble* Γ *des points* M *lorsque* M' *décrit la demi – droite d'équation* : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$.

Bon Travail

www.devoir@t.net © 2012

Correction

Exercice1 : (3points)

1) **a)** $\lim_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

$\lim_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Or $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ *et* $\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ car la droite Δ : $y = x$ est une asymptote oblique à (C)au voisinage de $+\infty$

2) **c)** $\frac{b-c}{b-a} = \left|\frac{b-c}{b-a}\right| e^{i\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)} = \frac{BC}{BA}e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Or $\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AC} = 2\frac{BC}{AC} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Ainsi $\frac{b-c}{b-a} = \sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\sqrt{3}$.

3) Faux. Contre exemple : $U_n = (-1)^n$.
(U_n) est divergente mais (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1.

Exercice 2 : (3 points)

$g(x) = 4x^3 - 3x - 8.$

1) g est dérivable sur IR et pour tout réel x, $g'(x) = 12x^2 - 3$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-7	↘	-9	↗ 0	$+\infty$

2) D'après le tableau de variation de g : g(x) < 0 ∀ x ∈ $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$.

Sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, g est continue et strictement croissante donc l'équation g$(x) = 0$ admet une unique solution α.

De plus g(1) = -7< 0 et g(2) = 18 > 0, donc 1< α < 2.

3)

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 3 : (6points)

1) a) Montrons que pour tout entier $n, U_n > 0$.

Pour $n = 0$, $U_0 = 1 > 0$.

Supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.

Il est clair que si $U_n > 0$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{\left(1+\sqrt{U_n}\right)^2} > 0$. D'où $U_n > 0 \ \forall\, n \geq 0$.

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{\left(1+\sqrt{U_n}\right)^2} < 1$ D'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel L tel que

$L \geq 0$ et $\frac{L}{(1+\sqrt{L})^2} = L \Leftrightarrow 1 + \sqrt{L} = 1 \Leftrightarrow L = 0.$

2) a) Pour tout entier n, $V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{U_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2}}} = \frac{1+\sqrt{U_n}}{\sqrt{U_n}} = \frac{1}{\sqrt{U_n}} + 1 = 1 + V_n$ donc

(V_n) est une suite géométrique de raison 1.

b) Pour tout entier n, $V_n = V_0 + n = 1 + n.$

$V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}} \Longrightarrow U_n = \frac{1}{V_n{}^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

3) $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) pour tout $\in \mathbb{N}^*$,

$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k - \sum_{k=0}^{n} U_k = U_{n+1} > 0.$

D'où (S_n) est croissante.

b) On remarque que $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. Or $U_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+n}$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\Longrightarrow S_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

(S_n) est croissante et $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc (S_n) converge vers un réel ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 2$.

Exercice 4 : (8 points)

1) $f_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1 + ze^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}} - z} = \frac{1-iz}{-i-z} = \frac{i(-i-z)}{-i-z} = i$, $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = \frac{1 + ze^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{2}} - z} = \frac{1+iz}{i-z} = \frac{i(-i+z)}{i-z} = -i.$

2) Pour $\theta = 0$, $f_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

a) Pour tous z et z' de $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z' = \frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z' - zz' = 1 + z$

$\Leftrightarrow z(1 + z') = z' - 1 \Leftrightarrow z = \frac{z'-1}{z'+1}$. Or $-f_0(-z') = -\frac{1-z'}{1+z'} = \frac{z'-1}{z'+1}$.

D'où $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z = -f_0(-z')$.

b) Pour tout $\alpha \in \mathrm{IR}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f_0(e^{i\alpha}) = \frac{1 + e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{-2i\sin\frac{\alpha}{2} e^{\frac{i\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{-i\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{i}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

Rq :

Pour tout $\alpha \in \mathrm{IR}$.

$1 + e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{-i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}$.

$1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{-i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left(e^{\frac{-i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}$.

c) Soit $u^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \Leftrightarrow u = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $u = -e^{\frac{i\pi}{8}} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$.

www.devoir@t.net © 2012

d) $(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $\frac{1+z}{1-z} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$

(d'après2) c)) $\Leftrightarrow$ $f_0(z) = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $f_0(z) = e^{\frac{i9\pi}{8}} \Leftrightarrow z = -f_0\left(e^{\frac{i\pi}{8}}\right)$ ou $z = -f_0\left(e^{\frac{i9\pi}{8}}\right)$

(d'après2) a)) $\Leftrightarrow z = -\frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ ou $z = -\frac{i}{\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)} = \frac{i}{\tan\frac{\pi}{8}}$. (d'après 2) b)).

3) a) $\forall\, \theta \in IR \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $f_\theta(z) = \dfrac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z} = \dfrac{e^{i\theta}(e^{-i\theta}+z)}{e^{i\theta}-z} \Leftrightarrow z_{M'} - z_O = -e^{i\theta}\,\frac{z-(-e^{-i\theta})}{z-e^{i\theta}}$

$\Longrightarrow$ $\arg(z_{M'} - z_O) \equiv \arg\left[e^{i\theta}\,\dfrac{z-(-e^{-i\theta})}{e^{i\theta}-z}\right][2\pi]$

$\Longrightarrow$ Pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$, $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \theta + \pi + \arg\left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right)[2\pi]$

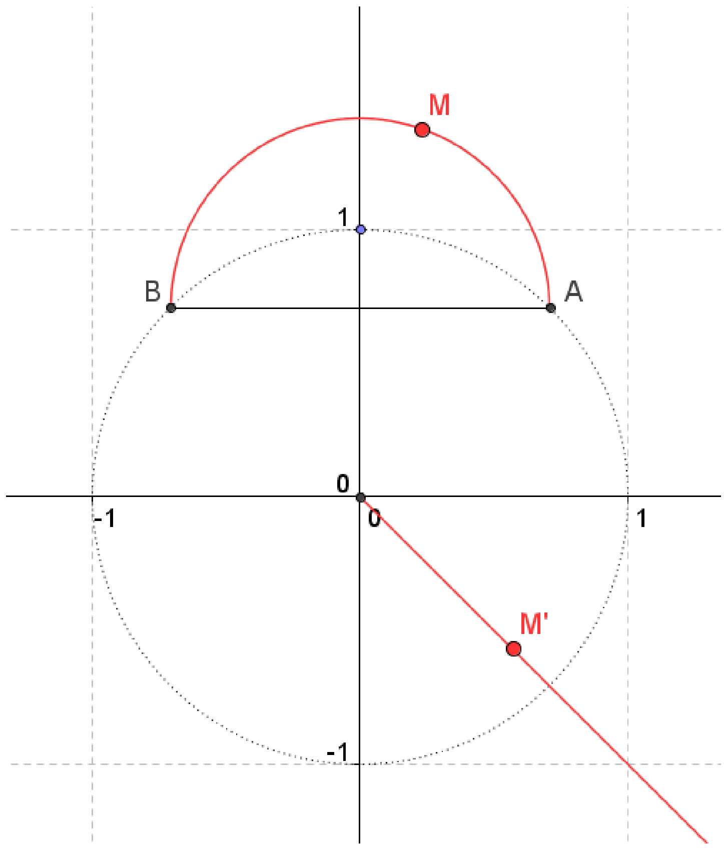
$\Longrightarrow$ Pour tout $M \neq A$ et $M \neq B$, $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \theta + \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.

b) Si $\theta = \frac{\pi}{4}$: $z_A = e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B = -e^{-i\theta} = -e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Si M' décrit la demi-droite d' équation : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$

alors $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et d'après la question précédente,

$\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \pi[2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par suite M appartient au demi cercle de diamètre [AB] privés des points A et B.



Fin

www.devoir@t.net © 2012

Direction régionale Tunis2 **Lycée Zahrouni** **4 Math. 1**	***Devoir de contrôle n°1*** **Durée 2heures**	**Prof : Mr Riahi** **2012 - 2011**

Exercice 1 (3.75pts)

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des questions suivantes

- *Une réponse correcte justifier vaut* ***0.75pt***
- *Une réponse correcte sans justification vaut* ***0.5pt***
- *Une réponse incorrecte ou l'absence de réponse vaut* ***0pt***

1) L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $z = 4 + e^{i\alpha}$,avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est un cercle
2) Soit z un nombre complexe et d = z + 2i, on a : $|d| = |z| + 2$
3) La fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ est continue sur IR
4) Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation : $mz^2 + 2m^2z - 1 = 0$ ou m est un nombre complexe de module 2
On a alors : $|z_1 + z_2| = 4$
5) Le nombre complexe $u = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$ est une racine sixième de $8e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exercice 2 (5pts)

On considère la suite réelle (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 5 - \sqrt{U_n^{\ 2} + 9} \ ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 4$
b) Montrer que la suite (U_n) est croissante
c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite
2) Soit $V_n = \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{k=n} U_k$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 0$
3) On considère la suite réelle (W_n) définie par : $W_n = 2\sum_{k=0}^{k=n} U_{k+1} + n^2V_n$
a) Montrer que pour tout entier naturel k tel que : $0 \leq k \leq n$, on a : $U_{k+1} \geq \dfrac{3-U_k}{2}$
(*On pourra remarquer que la suite (U_n) est croissante*)
b) Déduire que $W_n \geq 3n + 3$; puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$

Exercice 3 (5pts)

1) le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .Soient A et B les points d'affixes respectives i et (– i). et $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1
Soit F l'application qui à tout point M d'affixe z non nul associe les points M' d'affixe respective
$$z' = \frac{z^2+1}{z}$$; On désigne par M'' le symétrique de M par rapport à $(O, \vec{u})$

1) a) Déterminer F(A) et F(B)
b) Montrer que si z est un imaginaire pur alors z' est un imaginaire pur

© 2011 www.devoir@t.net

c) En déduire l'image de la droite (AB) par F

2) a) Montrer que si $z = e^{i\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$ alors z' = 2cosα

En déduire que si M est un point de cercle ($\mathscr{C}$) alors M' décrit un segment qu'on précisera

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z' = 2\cos\alpha$ (on donnera l'écriture exponentielle des solutions trouvées)

3) a) Vérifier que pour tout nombre complexe z non nul on a : $z' - z = \frac{1}{z}$

b) En déduire que $\mathrm{MM}' = \frac{1}{\mathrm{OM}}$ et que $\overrightarrow{\mathrm{MM}'}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}''}$ sont deux vecteurs colinéaires de même sens

c) Montre alors que si M est un point du cercle ($\mathscr{C}$) alors OMM'M'' est un losange

Exercice 4 (6,25pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On a représentée ci-dessous la courbe représentative (C) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ .On sait que la courbe (C) admet :

- Une asymptote D d'équation : y = 3 – x au voisinage de +∞
- Une branche parabolique de direction $(O,\vec{j})$ au voisinage de – ∞

1) En utilisant le graphique

a) Déterminer : $f(0)$; $f(-1)$ et $f([2,+\infty[)$

b) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x-3)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{fof}(x)}{f(x)}$

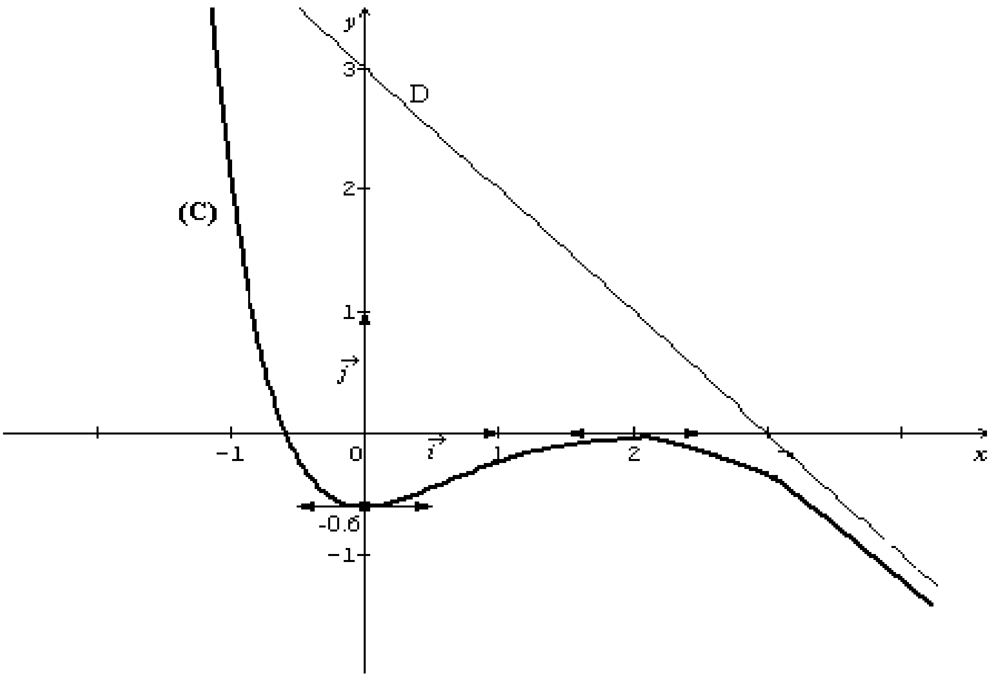
c) Dresser le tableau de variation de f

2) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle] – 1,0 [

3) Soient les fonctions : $g(x) = \frac{1}{x^2}$ et $h(x) = \mathrm{gof}(x)$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h

b) Calculer $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.



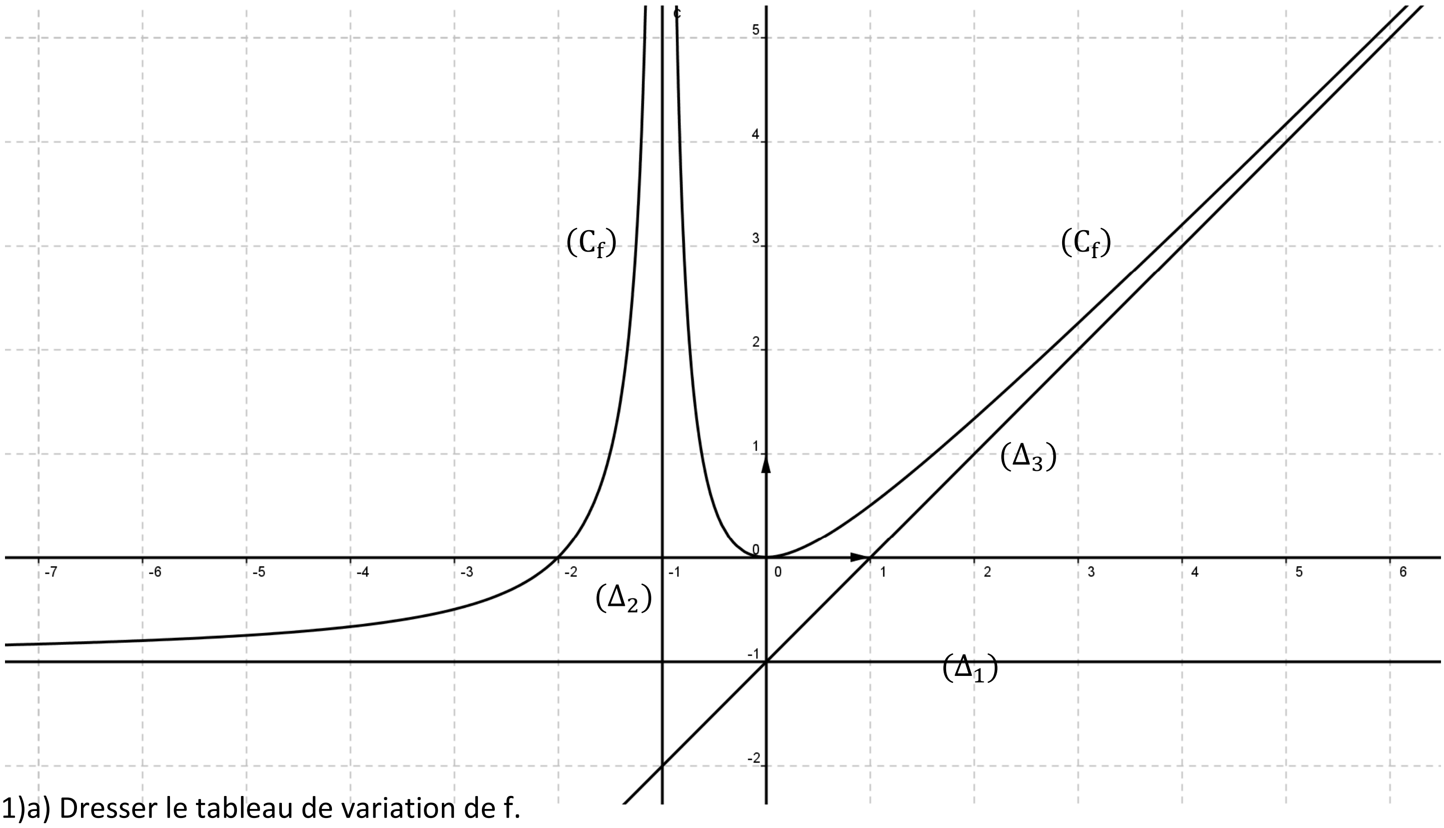
BON TRAVAIL

www.devoir@t.net © 2011

L. Regueb	**Mathématiques**	Classe : 4ème M
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle№1	Le : 18/11/2011 Durée : 2h

Exercice1(7pts)

On a représenté dans un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C_f) d'une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et les droites (Δ_1) , (Δ_2) , (Δ_3) asymptotes à (C_f) .



1)a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Déterminer l'image par f de chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$.

c) Calculer $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ et $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$.

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g .

b) Dresser le tableau de variation de g .

c) Soit k un réel strictement positif, donner le nombre de solutions de l'équation : g(x) = k .

3)a) Montrer que la fonction $f\circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

b) Déterminer les limites de $f\circ f$ aux bornes de son domaine de définition $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

c) Déterminer $(f\circ f)(\,]-\infty,-2])$.

d) Montrer que l'équation $(f\circ f)(x)=\frac{-1}{2}$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

www.devoir@t.net © 2011

Exercice2(6pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{2}{u_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3)a) Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 \leq u_{n+1} - u_n \leq 3$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n + 1 \leq u_n \leq 3n + 1$.

c) Calculer la limite de (u_n) .

4) On pose , pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \sum_{k=0}^{k=2n} \frac{(-1)^k}{u_k} = \frac{(-1)^0}{u_0} + \frac{(-1)^1}{u_1} + \frac{(-1)^2}{u_2} + \cdots\cdots + \frac{(-1)^{2n}}{u_{2n}}$

et $w_n = v_n - \frac{1}{u_{2n+1}}$.

a) Montrer que (v_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes.

b) Donner un encadrement de $L = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice3(7pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\,\vec{u}\,;\,\vec{v})$. On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1 , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-iz-2}{z+1}$.

Soient A , B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2i$ et $c = -i$.

1) Soit C' l'image du point C par f . Donner l'affixe c' du point C' sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

2) Calculer l'affixe du point D ayant pour image par f le point D' d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.

3) Pour tout nombre complexez différent de -1 , on note p le module de z+1 et p' le module de z'+i .

a) Démontrer que pour tout complexe z différent de -1 , on a : $pp' = \sqrt{5}$.

b) Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2 , montrer qu'alors M' = f(M) appartient à un cercle (Γ') , dont on précisera le centre et le rayon.

4) Pour tout nombre complexe z différent de -1 , on considère le nombre complexe $w = \frac{z-2i}{z+1}$.

a) Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe w .

b) Montrer que $z' = -iw$.

c) Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul .

d) Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F) .

www.devoir@t.net © 2011

Lycée pilote de Kairouan **Devoir de contrôle n°1**		Prof : Troudi Kamel Date : 10-11-2011	
Année Scolaire 2011-12	Classe :4ème Maths 2	Durée : 2 h	Coef :4

Exercice N°1 (3 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -1+\frac{2}{\pi}x+\sqrt{1-\cos x}$

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

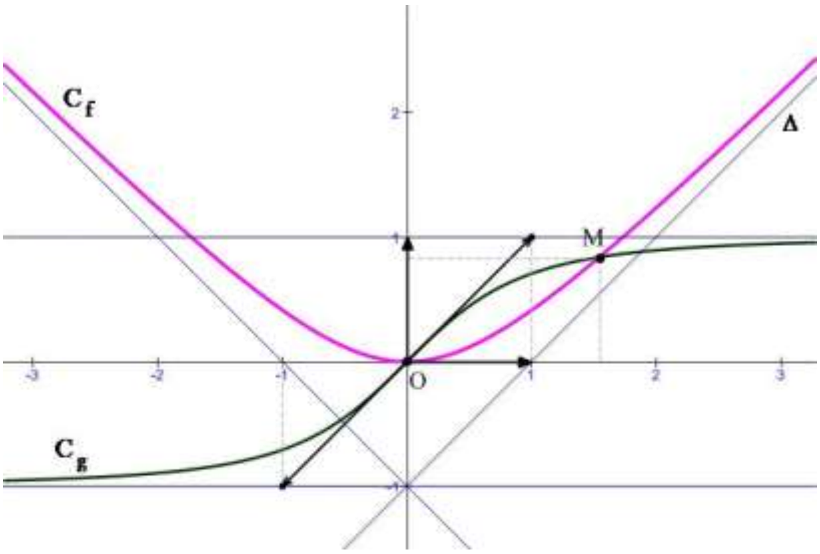
2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\left[f(x)\right]^{n+1}} = 0$.

3) l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right[$ une solution unique x_0.

4) Il existe au moins un réel c dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice N°2 (6 points)

Dans le graphique ci-dessous $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, respectivement des fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$. Au voisinage de $+\infty$, $\mathscr{C}_f$ Possède une asymptote oblique Δ et $\mathscr{C}_g$ possède une asymptote horizontale.



1) Utiliser le graphique pour donner :

a) La parité de chaque fonction

b) $f(0), g(0), f'(0), g'(0), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}, \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x), \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

c) La fonction principale et sa fonction dérivée parmi f et g

d) Construire la tangente T en M à la courbe $\mathscr{C}_f$ (Expliquer sur votre copie)

2) Pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ On pose : $\varphi(x) = tg(2x)$

a) Soit $n\in\mathbb{N}$: Montrer que l'équation . : $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ admet dans $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ une solution une solution unique a_n. calculer a_0 puis a_2

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et quelle est convergente vers 0.

www.devoir@t.net © 2011

3) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}^+} fo\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} fo\varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}^+} go\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} go\varphi(x)$

b) Montrer que $go\varphi$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.Dresser le tableau de variation de $go\varphi$.

Exercice N°3 (5 points)

Le plan complexe P étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1) On donne dans ℂ l'équation (E_θ) : $z^3+2ie^{i\theta}z^2-2ie^{2i\theta}z-4e^{3i\theta}(i+2)=0$, $\theta\in[0,2\pi[$.

a) Vérifier que 2 est une solution de (E_0) (l'équation pour $\theta=0$).

b) Résoudre alors dans ℂ l'équation (E_0) .

2)a) Montrer que z est une solution de (E_θ) si et seulement si $e^{-i\theta}z$ solution de (E_0)

b) En déduire les solutions de (E_θ).

3) On note A,B et C les images des solutions de (E_0) et par A',B' et C' les images des solutions de (E_θ).

a) Calculer puis interpréter les complexes $\frac{Z_{\overrightarrow{OA}}}{Z_{\overrightarrow{CB}}}$ et $\frac{Z_{\overrightarrow{OB}}}{Z_{\overrightarrow{AC}}}$.

b) Caractériser l'application r : $P\longrightarrow P$ tq: $M(z)\mapsto M'(z')$; $z'=e^{i\theta}z$

c) En déduire que ABC et A'B'C' ont le même orthocentre.

d) Montrer que les points A', B' et C' varient sur des cercles concentriques apréciser .

Exercice N°4 (6 points)

On considère dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et E d'affixes respectives $1, -1$ et $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1) a) Déterminer les racines cubiques de j et de $\bar{j}$

b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{j\}$ et $\theta\in\mathbb{R}$ on a : $\frac{j+z}{j-z}=e^{i\theta}\Leftrightarrow z=i\,j\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$

c) En déduire les solutions de l'équation $(E'):(j+z)^6+(j^2-z^2)^3+(j-z)^6=0$

2)Soit f l'application de P privé B dans P qui à tout point $M(z)$ associe $M'(z')$ tel que $z'=\frac{-2z}{z+1}$

a) Ecrire j et l'affixe de E'= f(E) sous forme exponentielle

b) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ $z'+1=\frac{1-z}{1+z}$

c) Montrer que pour tout M distinct de B, on a : $BM'=\frac{AM}{BM}$

d)En déduire que lorsque M varie sur l'axe des ordonnées, M' varie sur un cercle à préciser

3)Soit Δ la droite d'équation $x=-1$

a) Montrer que si $M'\in\Delta$ alors $\frac{1-z}{1+z}$ est un imaginaire

b) En déduire que lorsque M' varie sur la droite Δ, M varie sur un cercle à préciser

4) a)Montrer que : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}\right)\equiv\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\ (2\pi)$

b) En déduire l'ensemble des points M lorsque M' décrit la demie droite [BE) privée du point B.

Lycée secondaire : ALI BOURGUIBA KALAA KBIRA		Année scolaire : 2011 - 2012
Prof : MAATALLAH	Devoir de contrôle n° 1	Classes : 4 M
Epreuve : Mathématiques	Date : 19 - 11 - 2011	Durée : 2 heure

Exercice n 1 (6 points)

1/On considère les suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$

a) Etudier le sens de variation des suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Etablir que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes .

c) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente .

2/ soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans [0 ; 1] telles que $\lim_{n\to+\infty} S_nT_n = 1$. Etudier le comportement des deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

Exercice n 2 (6 points)

1/ Déterminer l'ensemble des points N d'affixe z tels que $\bar{z}z^2$ soit un réel .

2/ Soit z un nombre complexe différent de 1 . Montrer que $i\frac{z+1}{1-z}$ est un réel si , et seulement si , $|z| = 1$

3/ Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A , et B les points d'affixes1 et -1. Soit f l'application du plan P\{A} dans P qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que : $z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$

a) Etablir que $|z'| = 1$ et que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel . Montrer que $\frac{z'+1}{z-1}$ est un imaginaire .

b) Interpréter géométriquement les trois propriétés établies dans la question précédente . Donner une construction géométrique de point M' connaissant le point M .

Exercice n 3 (8 points)

Soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par: $g(x) = 1 - 2x\tan(x)$.

1/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une unique solution β et que $\beta \in]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}[$.

2/ Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \sqrt{|x|}\cos(x)$.

a) Montrer que f est paire .

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu .

c) Montrer que f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et que $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}]$: $f'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}g(x)$

d) Etudier les variations de f sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ puis construire C_f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

e) Donner un encadrement de $f(\beta)$ et montrer que $\forall x \in [0,\frac{\pi}{2}]$ on a : $f(x) < 1$.

3/ Soit h la fonction définie sur $[\beta,\frac{\pi}{2}]$ par : $h(x) = \cos(x) - \sqrt{x}$.

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]\frac{\pi}{6},\beta[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$

Il sera tenu compte de la rédaction et la bonne présentation de la copie .

www.devoir@t.net © 2011

Lycées Houmet Souk 1 & 2	Devoir de Contrôle N : 1	4 Mathématique
Profs : Loukil . M & Zayoud . A	Durée : 2 Heures	12 Novembre 2011

EXERCICE N : 1 (3 points)

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée

I) $\lim_{x\to+\infty} \tan\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right)$ est égale :

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** $-\infty$

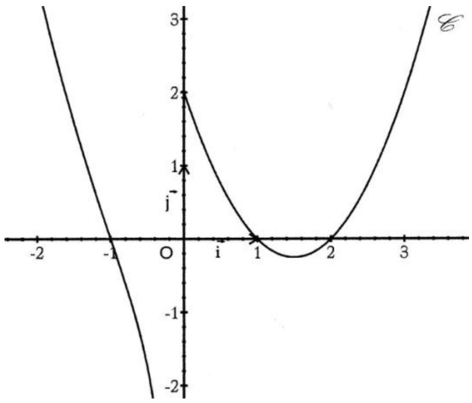
II) Soit g une fonction tel que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$: $\frac{x^2-1}{x^2} \leq g(x) - x \leq \frac{x^2+1}{x^2}$

et (Cg) sa courbe dans un repère orthonormé , alors :

a) $\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ **c)** $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (Cg)

III) Le graphique ci-contre est la représentation graphique $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur IR* et telle que :

- L'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ admet deux branches paraboliques de direction $(O ; \vec{j})$.



1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$

2) Le domaine de définition de $f \circ f$ est :

a) IR* **b)** IR \ { -1 , 1 , 2 } **c)** IR* \ { -1 , 1 , 2 }

3) Le nombre de solution(s) de l'équation $f \circ f(x) = x$ dans $]0 ; 1[$ est :

a) 0 **b)** 1 **c)** 2

EXERCICE N : 2 (5.5 points)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est croissante .

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$.

www.devoir@t.net © 2012

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2n}}{U_n}$

EXERCICE N : 3 (6 points)

Soit **m un nombre complexe non nul** et soit **(E)** l'équation : $z^2 + im\,z - (1+i)m^2 = 0$

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** .

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A , M et M'' d'affixes respectives : 1 , m et $(-1-i)\,m$.

Soit M' le point du plan tel que : $\begin{cases} OM' = \sqrt{2}\,OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$

1) a) Déterminer en fonction de m , l'affixe m' de M' .

b) Vérifier que M' et M'' sont symétrique par rapport à O.

2) Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle en M .

3) Déterminer et construire l'ensemble **(E)** des points M tels que $m' \in \,]-\infty\,;0[$.

4) On pose : $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \,]0\,;\dfrac{\pi}{2}[$.

a) Ecrire $m' - 1$ sous forme exponentielle.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OAM' est un triangle équilatéral .

EXERCICE N : 4 (5.5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un carré direct OABC de centre Ω .

On note I , J et K les milieux respectives de [OA] , [OC] et [AB] .

1) Soit $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$. Caractériser f .

2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J .

a) Montrer que g est une symétrie glissante .

b) Montrer que g (A) = O .

c) En déduire les éléments caractéristiques de g .

3) a) Vérifier que $g = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$.

b) Soit D = g (K) . Montrer que O est le milieu de [ID] .

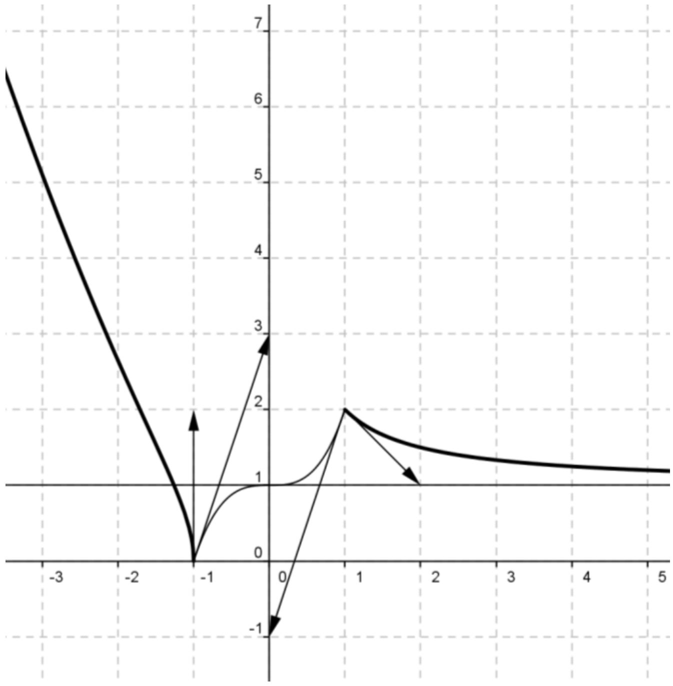
4) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ .

b) Trouver alors l'ensemble Δ des points M du plan tels que f (M) = g (M) .

www.devoir@t.net © 2012

Exercice N°1 : (3 points)



La courbe ci-contre représente une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.La droite y=1 désigne à la fois l'asymptote à la courbe de f en $+\infty$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

la courbe de f admet une branche parabolique de direction celle de (y'y) au voisinage de -∞.

Par justification graphique déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to(-1)^-} \frac{f(x)}{x+1}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \frac{f(x)}{x+1}$, $f'(0)$, $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)-2}{x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to1^+} f(\frac{1}{1-x^2})$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{1-f(x)}$

Exercice N°2 : (6 points)

1) Soit ω un nombre complexe non nul

a)Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation (E) : $\omega^2z^2 - \omega z + 1 = 0$

b) On pose dans toute la suite $\omega = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
Mettre les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ de sens direct
On note M, M_1 et M_2 les points d'affixes respectives :
$\omega = e^{i\theta}$, $z_1 = e^{i\left(-\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$ et $z_2 = e^{i\left(-\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$

a)Vérifier que : $\overline{z_1}=e^{2i\theta}z_2$

b) Déterminer θ dans chacun des cas suivants :

- M_1 et M_2 Sont symétriques par rapport à $(o,\vec{u})$
- M_1 et M_2 Sont symétriques par rapport à $(o,\vec{v})$

c) Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment $[M_1M_2]$

d) Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ vari dans $\mathbb{R}$

e)Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux. En déduire une construction de M_1 et M_2 connaissant M sur le cercle trigonométrique avec $\theta \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

www.devoir@t.net © 2012

Exercice N°3: (5 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0=3$ et $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = \sqrt{8 + 2u_n}$

1)a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < 4$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante

c)En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ Retrouver la limite de (u_n) .

3) Pour n un entier naturel non nul, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 4 - \frac{2}{n}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \leq S_n < 4$

b) Déterminer la limite de (S_n)

Exercice N°4 : (6 points)

Soit $f_n(x) = x^5 + nx - 2n$ où $x \in \mathbb{R}$.

1)a)Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donner $f_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n et que $x_n \in [0,2]$

c)Calculer x_0 et x_1 et montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*: x_n \geq 1$

2)a)Montrer que $\forall x \in [0,2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}: f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

En déduire que la suite (x_n) est croissante et qu'elle converge.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}: 2 - \frac{32}{n} \leq x_n \leq 2$ .En déduire la limite de (x_n) .

3) Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = -2 - x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ g(x) = f_1(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a)Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

b) Montrer que pour tout $x < 0$: $-x^2 - 2 \leq g(x) \leq x^2 - 2$

c)Montrer que g est continue en 0.

www.devoir@t.net © 2012

❖❖ ❖ LYCEE THELEPTE ❖❖ ❖

Niveau : 4 ème maths

DEVOIR DE CONTROLE N°1 En Mathématiques

Enseignant : *H. Salem*

❖❖ ❖ **Durée : 2 heures** ❖❖ ❖

Le 09 – 11 – 2011

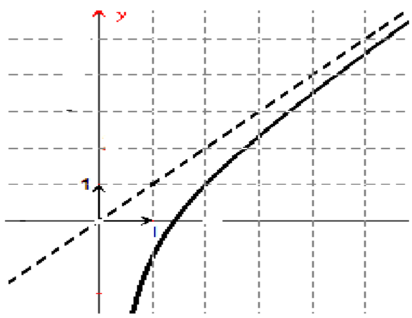
Exercice 1 : (3pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Justifier votre réponse .

1) On pose $U_n = n\,sin\left(\frac{(-1)^n}{n\pi}\right)$
   a) (U_n) est divergente.
   b) (U_n) converge vers $\frac{1}{\pi}$.
   c) (U_n) converge vers $\frac{-1}{\pi}$.

2) La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0,+\infty[$. La droite Δ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

   $lim_{x\to 0^+}\ xf\left(\frac{1}{x}\right) =$:
   a) 1
   b) 0
   c) $+\infty$



3) Si $Z = 1 + i$ alors Z^{2012} = :
   a) 2^{1006}
   b) -2^{1006}
   c) i

Exercice 2 : (5pts)

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)$. $n \geq 1$

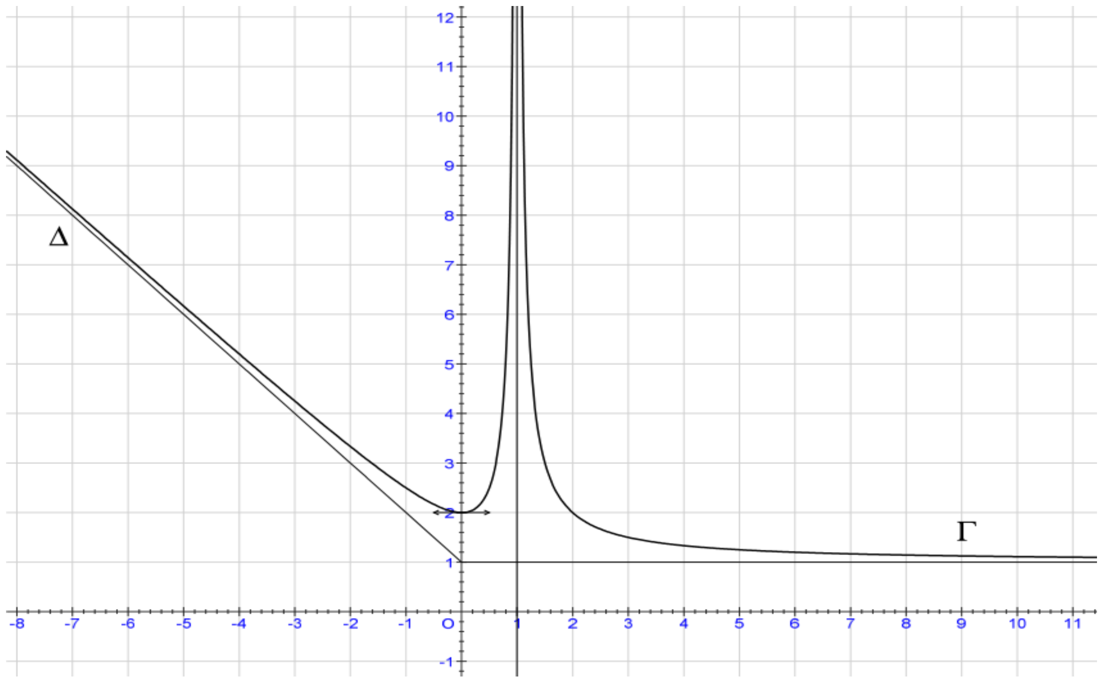
1) a) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
   b) Montrer que (U_n) est croissante.
2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

www.devoir@t.net © 2012

c) En déduire que (U_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

Exercice 3 : (5pts)

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur IR\ {1} .On sait que la droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$. Γ admet deux autres asymptotes d'équations respectives x = 1 et y = 1.



1) a) Par une lecture graphique déterminer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \begin{cases} f \circ f(x) \ ; \ x \neq 1 \\ 1 \quad\quad ; \ x = 1 \end{cases}$

a) Déterminer g(2), g(0), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que g est continue sur IR.

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 1[$ par g.

Exercice 4 : (7pts)

Pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation $(E_\theta): z^2 - z + e^{2i\theta} - ie^{i\theta} = 0$.

1) a) Calculer $\left(1 + 2ie^{i\theta}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

www.devoir@t.net © 2012

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives 1, $z' = 1 + e^{i\theta}$ et $z'' = -ie^{i\theta}$.

   a) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

   b) Montrer que le quadrilatère OM'AM'' est un parallélogramme.

   c) Déterminer θ pour que OM'AM'' soit un losange.

3) Soit l'équation (E) : $(z + 2i)^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

   a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1 + i)$.

   b) Déterminer les solutions de (E) sous forme algébrique.

Bon Travail

www.devoir@t.net © 2012

Correction

Exercice 1 : (3 pts)

Barème : Pour chaque question : (0.5 pt) pour la réponse et (0.5pt) pour la justification.

1) a) (U_n) diverge. En effet,

$$U_{2n} = 2n\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}{\frac{1}{2n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}$$

$$U_{2n+1} = (2n+1)\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right] = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right]}{-\frac{1}{(2n+1)\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_n U_{2n} \neq \lim_n U_{2n+1}$$

2) a) $\lim_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \lim_{x\to0^+}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$

(car la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$).

3) b) $Z^{2012} = ((1+i)^2)^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$

ou encore, $Z^{2012} = (1+i)^{2012} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2012} = 2^{1006}e^{i503\pi} = -2^{1006}$.

Exercice 2 : (5 pts)

1) a) $U_1 = 1$, $U_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $U_3 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$. (1,5 pts)

b) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc (U_n) est croissante. (0, 5 pt)

2) a) $\forall\, k \geq 2,\ k^2 \geq k^2 - k \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$ or $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ d'où $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. (1 pt)

b) $\forall n \geq 2,\ U_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}\right) - \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$

$\Rightarrow U_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$. (1 pt)

c) (U_n) croissante et majorée par 2 donc converge vers un réel (0,5 pt)

De plus $U_3 \leq U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ donc $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$. (0,5 pt)

www.devoir@t.net © 2012

Exercice 3 : (5 pts)

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1$ car Δ: $y=-x-1$est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$. (1pt).

b) T.V de f : (1pt).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	‖	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

2) a) $g(2) = f\circ f(2) = f(2) = 2$, $g(0) = f\circ f(0) = f(2) = 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f\circ f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f\circ f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (1pt).

b) g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car f continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(\mathbb{R}\backslash\{1\}) =]1,+\infty[\subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1} f\circ f(x) = 1 = g(1)$ donc g continue en 1.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$. (1pt).

c) $g(]-\infty,1[) = f\circ f(]-\infty,1[) = f([2,+\infty[) =]1,2]$ (1pt)

Exercice 4 : (7pts)

1) a) $(1+2ie^{i\theta})^2 = 1 + 4ie^{i\theta} - 4e^{2i\theta}$. (0,5pt)

b) $\Delta = (-1)^2 - 4(e^{2i\theta} - ie^{i\theta}) = (1+2ie^{i\theta})^2$

$Z' = \frac{1+1+2ie^{i\theta}}{2} = 1 + ie^{i\theta}$ et $Z'' = \frac{1-(1+2ie^{i\theta})}{2} = -ie^{i\theta}$. (1pt)

2) a) $Z' = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. (0,75pt)

$2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) > 0$, car si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$Z'' = -ie^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$. (0,75pt)

b) aff $(\overrightarrow{OM'}) = Z' = 1 + ie^{i\theta}$. aff $(\overrightarrow{M''A}) = 1 - Z'' = 1 - (-ie^{i\theta}) = 1 + ie^{i\theta}$.

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''A} \Leftrightarrow$ OM'AM'' est un parallélogramme. (1pt)

c) OM'A M'' est un losange si et seulement si OM'= OM'' $\Leftrightarrow |Z'| = |Z''|$

www.devoir@t.net © 2012

$\Leftrightarrow \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| = \left|e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right| \Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \quad (\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2})$ (1pt)

3) a) $4\sqrt{2}(1+i) = 8\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i)$ sont définies par les $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$. $Z_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$, $Z_1 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$, $Z_2 = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$(1pt)

b) $(Z+2i)^3 = 4\sqrt{2}(1+i) \Leftrightarrow Z+2i$ est une racine cubique de $4\sqrt{2}(1+i)$

$\Leftrightarrow Z+2i = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z+2i = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ou $Z+2i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow Z = 2cos\frac{\pi}{12} + i(2sin\frac{\pi}{12} - 2)$ ou $Z = 2cos\frac{3\pi}{4} + i(2sin\frac{3\pi}{4} - 2)$

ou $Z = 2cos\frac{17\pi}{12} + i(2sin\frac{17\pi}{12} - 2)$.

Or $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

$S_{\mathbb{C}} = \{ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2)\ , -\sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2), -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2) \}$(1pt)

www.devoir@t.net © 2012

Lycées Houmet Souk 1 & 2 Profs : Loukil . M & Zayoud . A	Devoir de Contrôle N : 1 Durée : 2 Heures	4 Mathématique 12 Novembre 2011

EXERCICE N : 1 (3 points)

Indiquer la bonne réponse pour chacune des questions suivantes. Aucune justification n'est demandée

I) $\lim\limits_{x \to +\infty} \tan\left(\frac{\pi x}{2x-1}\right)$ est égale :

a) $+\infty$ **b)** 0 **c)** $-\infty$

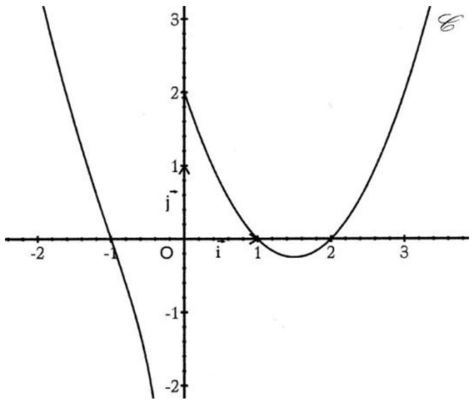
II) Soit g une fonction tel que pour tout $x \in]-\infty\,;0[$: $\frac{x^2-1}{x^2} \leq g(x) - x \leq \frac{x^2+1}{x^2}$

et (Cg) sa courbe dans un repère orthonormé , alors :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ **c)** $\Delta : y = x + 1$ est une asymptote à (Cg)

III) Le graphique ci-contre est la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur IR* et telle que :

- L'axe des ordonnées est une asymptote à $\mathscr{C}$.
- $\mathscr{C}$ admet deux branches paraboliques de direction $(O\,;\vec{j})$.



1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ égal à :

a) 0 **b)** $-\infty$ **c)** $+\infty$

2) Le domaine de définition de $f \circ f$ est :

a) IR* **b)** IR \ { -1 , 1 , 2 } **c)** IR* \ { -1 , 1 , 2 }

3) Le nombre de solution(s) de l'équation $f \circ f(x) = x$ dans $]0\,;1[$ est :

a) 0 **b)** 1 **c)** 2

EXERCICE N : 2 (5.5 points)

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est croissante .

3) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in IN$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

4) a) Montrer que pour tout $n \in IN$: $1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

www.devoir@t.net © 2012

EXERCICE N : 3 (6 points)

Soit **m un nombre complexe non nul** et soit **(E)** l'équation : $z^2 + im\,z - (1+i)m^2 = 0$

I) Résoudre dans l'équation **(E)** .

II) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) .

On considère les points A , M et M'' d'affixes respectives : 1 , m et (– 1 – i) m .

Soit M' le point du plan tel que : $\begin{cases} OM' = \sqrt{2}\,OM \\ (\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi] \end{cases}$

1) a) Déterminer en fonction de m , l'affixe m' de M' .

b) Vérifier que M' et M'' sont symétrique par rapport à O.

2) Montrer que le triangle OMM' est rectangle isocèle en M .

3) Déterminer et construire l'ensemble **($\mathcal{E}$)** des points M tels que m' $\in$] - ∞ ; 0 [.

4) On pose : $m = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{i\theta}$ avec $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Ecrire m' – 1 sous forme exponentielle.

b) Déterminer la valeur de θ pour laquelle OAM' est un triangle équilatéral .

EXERCICE N : 4 (5.5 points)

Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un carré direct OABC de centre Ω .

On note I , J et K les milieux respectives de [OA] , [OC] et [AB] .

1) Soit $f = S_{(OB)} \circ S_{(\Omega I)}$. Caractériser f .

2) Soit g une isométrie sans points fixes qui transforme O en C et I en J .

a) Montrer que g est une symétrie glissante .

b) Montrer que g (A) = O .

c) En déduire les éléments caractéristiques de g .

3) a) Vérifier que $g = t_{\overrightarrow{AO}} \circ S_{(AC)}$.

b) Soit D = g (K) . Montrer que O est le milieu de [ID] .

4) Soit $\varphi = g^{-1} \circ f$.

a) Déterminer $\varphi(O)$ et $\varphi(I)$ puis caractériser φ .

b) Trouver alors l'ensemble Δ des points M du plan tels que f (M) = g (M) .

www.devoir@t.net © 2012

❖❖ ❖ LYCEE THELEPTE ❖❖ ❖

Niveau : 4 ème maths

DEVOIR DE CONTROLE N°1 En Mathématiques

Enseignant : *H. Salem*

❖❖ ❖ **Durée : 2 heures** ❖❖ ❖

Le 09 – 11 – 2011

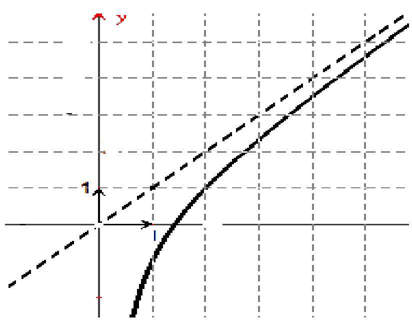
Exercice 1 : (3pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Justifier votre réponse .

1) On pose $U_n = n\,sin\left(\frac{(-1)^n}{n\pi}\right)$
   a) (U_n) est divergente.
   b) (U_n) converge vers $\frac{1}{\pi}$.
   c) (U_n) converge vers $\frac{-1}{\pi}$.

2) La courbe (C) ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0, +\infty[$. La droite Δ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

   $lim_{x\to 0^+}\ xf\left(\frac{1}{x}\right) =$:
   a) 1
   b) 0
   c) $+\infty$



3) Si $Z = 1 + i$ alors $Z^{2012} =$:
   a) 2^{1006}
   b) -2^{1006}
   c) i

Exercice 2 : (5pts)

Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right)$. $n \geq 1$

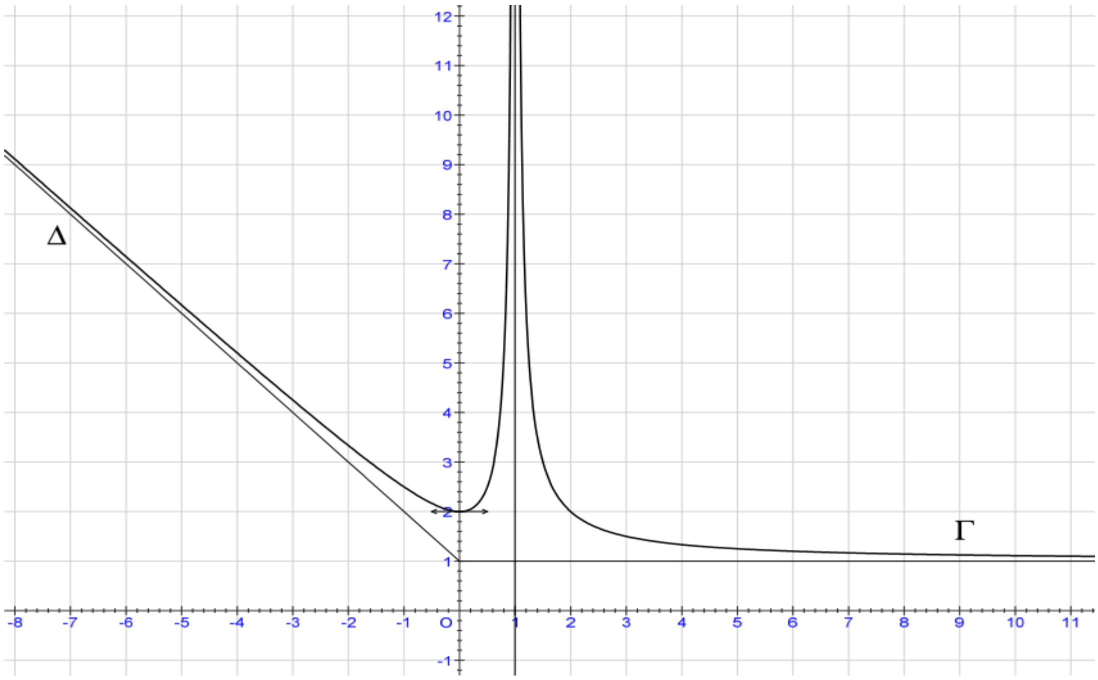
1) a) Calculer U_1 , U_2 et U_3 .
   b) Montrer que (U_n) est croissante.
2) a) Montrer que pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

www.devoir@t.net © 2012

c) En déduire que (U_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

Exercice 3 : (5pts)

Dans la figure ci-dessous Γ est la courbe représentative d'une fonction f définie et continue sur $IR \setminus \{1\}$ .On sait que la droite Δ est une asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$. Γ admet deux autres asymptotes d'équations respectives $x = 1$ et $y = 1$.



1) a) Par une lecture graphique déterminer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to1} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = \begin{cases} f\circ f(x) \ ; \ x \neq 1 \\ 1 \qquad\quad ; \ x = 1 \end{cases}$

a) Déterminer g(2), g(0), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que g est continue sur IR.

c) Déterminer l'image de l'intervalle $]-\infty, 1[$ par g.

Exercice 4 : (7pts)

Pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation $(E_\theta): z^2 - z + e^{2i\theta} - ie^{i\theta} = 0.$

1) a) Calculer $\left(1 + 2ie^{i\theta}\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ).

www.devoir@t.net © 2012

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.On désigne par A, M' et M'' les points d'affixes respectives 1, $z' = 1 + e^{i\theta}$ et $z'' = -ie^{i\theta}$.

   a) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

   b) Montrer que le quadrilatère OM'AM'' est un parallélogramme.

   c) Déterminer θ pour que OM'AM'' soit un losange.

3) Soit l'équation (E) : $(z + 2i)^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

   a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $4\sqrt{2}(1 + i)$.

   b) Déterminer les solutions de (E) sous forme algébrique.

Bon Travail

www.devoir@t.net © 2012

Correction

Exercice 1 : (3 pts)

Barème : Pour chaque question : (0.5 pt) pour la réponse et (0.5pt) pour la justification.

1) a) (U_n) diverge. En effet,

$$U_{2n} = 2n\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{1}{2n\pi}\right)}{\frac{1}{2n\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\pi}$$

$$U_{2n+1} = (2n+1)\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right] = -\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left[\frac{-1}{(2n+1)\pi}\right]}{-\frac{1}{(2n+1)\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{1}{\pi}$$

$$\lim_n U_{2n} \neq \lim_n U_{2n+1}$$

2) a) $\lim_{x\to 0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \lim_{x\to 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$

(car la droite d'équation $y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$).

3) b) $Z^{2012} = ((1+i)^2)^{1006} = (2i)^{1006} = -2^{1006}$

ou encore, $Z^{2012} = (1+i)^{2012} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{2012} = 2^{1006}e^{i503\pi} = -2^{1006}$.

Exercice 2 : (5 pts)

1) a) $U_1 = 1$, $U_2 = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$, $U_3 = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{3^2} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{9} = \frac{49}{36}$. (1,5 pts)

b) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

donc (U_n) est croissante. (0, 5 pt)

2) a) $\forall\, k \geq 2$, $k^2 \geq k^2 - k \Rightarrow \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2-k}$ or $\frac{1}{k^2-k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ d'où $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. (1 pt)

b) $\forall n \geq 2$, $U_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}\right) - \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)$

$\Rightarrow U_n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$. (1 pt)

c) (U_n) croissante et majorée par 2 donc converge vers un réel (0,5 pt)

De plus $U_3 \leq U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ donc $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$. (0,5 pt)

www.devoir@t.net © 2012

Exercice 3 : (5 pts)

1) **a)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = -1$ car Δ: $y=-x-1$est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$. (1pt).

b) T.V de f : (1pt).

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	||	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$ $+\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	1

2) **a)** $g(2) = f \circ f(2) = f(2) = 2$, $g(0) = f \circ f(0) = f(2) = 2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f \circ f(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (1pt).

b) g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car f continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(\mathbb{R}\backslash\{1\}) =]1,+\infty[\subset \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to1} g(x) = \lim\limits_{x\to1} f \circ f(x) = 1 = g(1)$ donc g continue en 1.

Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$. (1pt).

c) $g(]-\infty,1[) = f \circ f(]-\infty,1[) = f([2,+\infty[) =]1,2]$ (1pt)

Exercice 4 : (7pts)

1) **a)** $(1 + 2ie^{i\theta})^2 = 1 + 4ie^{i\theta} - 4e^{2i\theta}$. (0,5pt)

b) $\Delta = (-1)^2 - 4(e^{2i\theta} - ie^{i\theta}) = (1 + 2ie^{i\theta})^2$

$Z' = \frac{1+1+2ie^{i\theta}}{2} = 1 + ie^{i\theta}$ et $Z'' = \frac{1-(1+2ie^{i\theta})}{2} = -ie^{i\theta}$. (1pt)

2) a) $Z' = 1 + ie^{i\theta} = 1 + e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$. (0,75pt)

$2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$, car si $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$

$Z'' = -ie^{i\theta} = e^{-i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\theta} = e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$. (0,75pt)

b) aff $(\overrightarrow{OM'}) = Z' = 1 + ie^{i\theta}$. aff $(\overrightarrow{M''A}) = 1 - Z'' = 1 - (-ie^{i\theta}) = 1 + ie^{i\theta}$.

$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{M''A} \Leftrightarrow$ OM'AM'' est un parallélogramme. (1pt)

c) OM'A M'' est un losange si et seulement si OM'= OM'' $\Leftrightarrow |Z'| = |Z''|$

www.devoir@t.net © 2012

$$\Leftrightarrow \left|2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| = \left|e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)}\right| \Leftrightarrow\ 2\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$$

$\Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$ $\quad \left(\frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\right)$ (1pt)

3) a) $4\sqrt{2}(1+i) = 8\,e^{i\frac{\pi}{4}}$. Les racines cubiques de $4\sqrt{2}(1+i)$ sont définies par les $Z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$, $k \in \{0,1,2\}$. $Z_0 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{12}\right)}$, $Z_1 = 2e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\right)}$, $Z_2 = 2e^{i\left(\frac{17\pi}{12}\right)}$(1pt)

b) $(Z+2i)^3 = 4\sqrt{2}(1+i) \Leftrightarrow Z+2i$ est une racine cubique de $4\sqrt{2}(1+i)$

$\Leftrightarrow Z+2i = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ ou $Z+2i = 2e^{i\frac{5\pi}{12}}$ ou $Z+2i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow Z = 2cos\frac{\pi}{12} + i(2sin\frac{\pi}{12} - 2)$ ou $Z = 2cos\frac{3\pi}{4} + i(2sin\frac{3\pi}{4} - 2)$

ou $Z = 2cos\frac{17\pi}{12} + i(2sin\frac{17\pi}{12} - 2)$.

Or $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

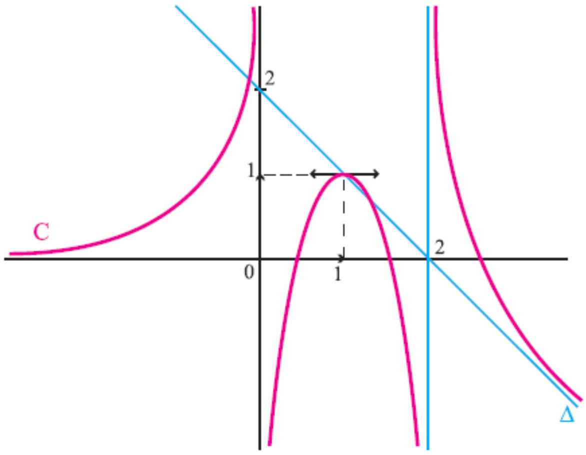
$S_{\mathbb{C}} = \{ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2)\ ,\ -\sqrt{2} + i(\sqrt{2}-2),\ -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} - i(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - 2)\ \}$(1pt)

www.devoir@t.net © 2012

Exercice 1 ;(5 points)

La courbe ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur **R** \ {0,2} et telle que $f(-\frac{1}{2})=1$

La droite Δ et les droites d'équations respectives x = 0,x = 2 et y = 0 sont des asymptotes à la courbe C.



1) Déterminer graphiquement

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+2x+1)$,

$\lim_{n\to+\infty} f(\frac{3^n+1}{4^n+5})$

$\lim_{x\to+\infty} f(-x^2+\sin(x))$

2) a) f o f est-elle continue sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$?

b) Etudier les variations de f o f sur $]-\infty,-\frac{1}{2}]$

c) Déduire que l'équation f o f(x) = 0 admet une seule solution dans $]-\infty,-\frac{1}{2}[$

Exercice 2 :(3 points)

Pour chacune des assertions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse
(si la réponse est VRAI, donner une justification rapide ; si la réponse est FAUX, donner un contre-exemple) :

1) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang

2) Toute suite réelle qui tend vers $+\infty$ est minorée

3) Le nombre complexe $j=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine 2011ième de 1.

Exercice 3(6 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur [0, 1] à valeurs dans [0, 1] et telles que pour tout x de [0, 1], f o g(x) =g o f(x).
On se propose de montrer qu'il existe un réel c de [0, 1] tel que f(c) = g(c).

1) Soit h la fonction définie par : h(x) = f(x) – x.

a) Montrer que h s'annule en au moins un réel a de [0, 1].

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n ≥ 1, $g^n(a)=f\left[g^n(a)\right]$

où $g^n=\underbrace{gogo...og}_{\text{n fois g}}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n=g^n(a)$.

a) Vérifier que $f(u_n)=u_n$ et que $g(u_n)=u_{n+1}$.

b) On suppose que la suite (u_n) est monotone.

Montrer alors qu'elle est convergente vers un rées ℓ .
Que peut-on dire de f(ℓ) et g(ℓ) ?
c) On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.

Montrer qu'il existe deux réels p et q tels que le produit (f – g)(p)$\times$(f – g)(q) soit négatif.

3) Conclure

Exercice 4 :(6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

Soit f l'application du plan P \ { I } dans lui-même qui a tout point M(z) associe le point M'(f(z)) telle que $f(z) = z' = \dfrac{-1+z}{1-\bar{z}}$

1) Montrer que, pour tout $z \neq 1$, $| z' | = 1$,

2) Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b différents de 1 et tels que f(A) = f(B)

a) Montrer $(a-1)(1-\bar{b}) = (1-\bar{a})(b-1)$

b) Déduire que les points A, B et I sont alignés.

3) Soit α, un réel appartenant à $]0, 2\pi[$:

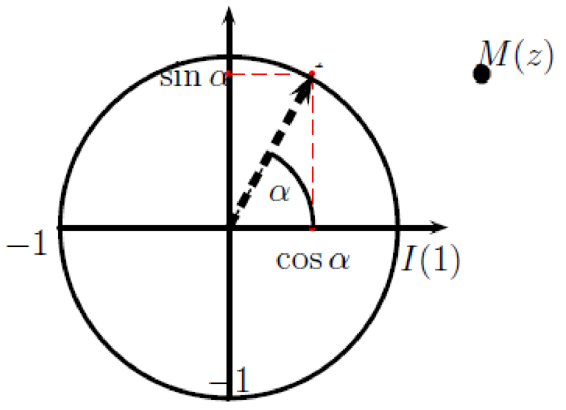
Montrer $f(e^{i\alpha}) = e^{i\alpha}$.

4) Etant donner un point M du plan d'affixe $z \neq 1$.

a) Montrer que si $z' \neq 1$ alors f(z) = f(z')

b) Déduire alors de ce qui précède une construction du point M'(z')

puis le placer sur la figure ci contre



Exercice 4 bac Sc : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, $\overrightarrow{OI}$,$\overrightarrow{OJ}$).

À tout point M d'affixe z distinct de I , est associé le point M' d'affixe z' définie par:

z' =$\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que z' soit imaginaire non nul.

2) a) Vérifier que pour tout z on a :

z' – 1 =$\frac{-2i}{\bar{z}+i}$

b) En déduire que pour tout point M distinct de J, on a :

IM' . JM = 2 et $(\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{IM'}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$.

c) Déduire une construction du point M' lorsque M appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre J et de rayon 1.

3) a) Résoudre dans C l'équation :$z^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

b) Soit $\alpha \in]0,2\pi[$, montrer que z' = $e^{i\alpha}$ équivaut à z = - cotan$\frac{\alpha}{2}$

c) Déduire alors les solutions de l'équation :

$$(\bar{z}-i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)\,(\bar{z}+i)^3$$

Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	05/11/2012
Niveau	4ème Maths1		Durée	2 h

Exercice 1 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & si \ x \in \,]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)} & si \ x \ \in [-1,1[\end{cases}$

1) Calculer la limite de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en -1
2) Calculer la limite de f à droite en 1
3) Sachant que f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$, déterminer $f(\,]-\infty, -1[\,)$ et $f(\,]1, +\infty[\,)$
4) Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
5) Monter que l'équation $f(x) = \frac{1}{\pi}$ admet au moins une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[$
6) Soit h la restriction de f à $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et $g = h \circ h$

   a- Déterminer l'ensemble de définition E de g

   b- Calculer les limites de g aux bornes de E

Exercice 2 : (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{2(\,i-\bar{z}\,)}{i+z}$; $z \neq -i$. On considère les points $B(-i)$, $C(i)$, $A(2)$ et $N(\bar{z}\,)$

On désigne par $\mathcal{C}_{(O,2)}$ le cercle de centre O et rayon 2

1) Montrer que $M' \in \mathcal{C}_{(O,2)}$.
2) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z' = 2$.

   b- En déduire l'ensemble des antécédents de A par f.
3) a- Montrer que $\frac{z'-2}{\bar{z}-i}$ est un réel.

   b- En déduire que les droites (AM') et (CN) sont parallèles.

   c- Expliquer comment construire M'connaissant M
4) La droite (AC) recoupe $\mathcal{C}_{(O,2)}$ en E. Montrer que $f\big((AB) \setminus \{B\}\big) = \{E\}$

Exercice 3 : (4 pts)

Soit l'équation(E_θ) : $z^2 + (2i\,sin\theta - 2)z - 2e^{i\theta} - 1 = 0$, $\theta \in]-\pi\,,\,\pi[$.

1) vérifier que $(2i\,sin\theta - 2)^2 + 8e^{i\theta} + 4 = (2cos\theta + 2)^2$
2) Résoudre alors (E_θ).
3) Soient les points $A(1)$, $M\left(-e^{i\theta}\right)$ et $N\left(2 + e^{-i\theta}\right)$

   a-Montrer que $Z_{\overrightarrow{AM}} = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $Z_{\overrightarrow{AN}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

   b- En déduire que le triangle AMN est isocèle en A.
4) Pour quelles valeurs de θ le triangle AMN est-il équilatéral ?

Exercice 4 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{8}{x+1}$.

et $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq U_n \leq 7$
2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ $V_n = U_{2n}$, $W_n = U_{2n+1}$.

   a- Montrer que la suite V est décroissante et que W est croissante.

   b- En déduire que les suites V et W sont convergentes.
3) On désigne par a et b les limites respectives des suites V est W

   a- Montrer que $a = 1 + \frac{8}{b+1}$ et que $b = 1 + \frac{8}{a+1}$

   b- En déduire que $a = b = 3$ et que la suite U converge vers 3.
4) a- Montrer que $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{3}|U_n - 3|$

   b- En déduire que $|U_n - 3| \leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

   c- Retrouver alors la limite de la suite U.

Bon travail. ☺

Exercice 1 (6 pts)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E) : iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$.

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose : $f(z) = iz^3 + (1-3i)z^2 - (4-3i)z + 3 + i$

a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que :
$\forall z \in \mathbb{C};\ f(z) = (z-i)(az^2 + bz + c)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

3) a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $1 + i\sqrt{3}$

b) En déduire la forme exponentielle de chacun des complexes suivants :
$3 + i\sqrt{3}$ et $2i - \left(1 + i\sqrt{3}\right)$

Exercice 2 (7 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

1) a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du triangle OAB.

c) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe z_A.

2) Soit C le point du plan tel que : $OA = OC$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

a) Montrer que $|z_C| = 2$ et $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ où z_C est l'affixe du point C.

b) En déduire que $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

3) a) Montrer que $OABC$ est un losange.

b) $OABC$ est-il un carré ?

4) Déterminer et construire l'ensemble $E = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \right\}$

http://mathematiques.tk/

www.devoir@t.net © 2012

Exercice 3 (7 pts)

1) Soit la fonction g définie sur $[0\ ,\ \pi]$ par : $g(x) = -9x\sin x - 9\cos x + 12$

a) Vérifier que : $\forall x \in [0\ ,\ \pi]; g'(x) = -9x\cos x$.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $[0\ ,\ \pi]$.

c) Déterminer les images par la fonction g des intervalles $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right]$.

d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0\ ,\ \pi]$ exactement deux solutions qu'on notera α et β.

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3\cos x - 4}{3x}$.

a) Montrer que $\forall x \in \left]0\ ,\ +\infty\right[; \dfrac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \dfrac{-1}{3x}$.

b) Montrer que $\forall x \in \left]-\infty\ ,\ 0\right[; \dfrac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \dfrac{-7}{3x}$.

c) Déduire les valeurs des limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

3) a) Vérifier que : $\forall x \in \left]0\ ,\ \pi\right]; f'(x) = \dfrac{g(x)}{9x^2}$.

b) Déterminer alors le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $\left]0\ ,\ \pi\right]$.

7C	DEVOIR DE MATHS Nombres complexes	DUREE 4H	11/11/2012

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie du candidat.

EXERCICE 1 (3 POINTS)

On muni le plan complexe d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f_a l'application qui associe au point M d'affixe z le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = (\frac{1}{2}+ai)z+\frac{3}{2}-3ai, \qquad a \in \mathbb{C}$$

Reconnaître l'application f_a et la caractériser pour chacune des valeurs suivantes du nombre complexe a :

1) $a=-\frac{1}{2}i$ **2)** $a=i$ **3)** $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **4)** $a=\frac{1}{2}$

EXERCICE 2 (3 POINTS)

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

E_α $\quad z^2-2z\sin\alpha+1=0$ **où α est un réel donné.**

1) Résoudre l'équation E_α et donner les solutions sous formes algébrique et trigonométrique.

2) En déduire l'écriture exponentielle des solutions de l'équation :

$$z^{2n}-2z^n\sin\alpha+1=0 \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \text{ donné.}$$

EXERCICE 3 (3 POINTS)

Soit $z=e^{i\frac{\pi}{2013}}$. On pose $S=1+z^2+z^4+...+z^{2012}$.

1) Montrer que $S=\frac{1}{1-z}$.

2) Ecrire S sous forme algébrique.

3) En déduire que : $\cos\frac{2\pi}{2013}+\cos\frac{4\pi}{2013}+...+\cos\frac{2012\pi}{2013}=\frac{-1}{2}$.

www.devoir@t.net © 2012

EXERCICE 4 (5 POINTS)

On considère le polynôme *P*, défini sur l'ensemble des nombres complexes, par :

$$P(z) = z^3 - 4iz^2 - (4+i)z - 3 + 3i$$

1.a) Calculer $P(-1)$.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que pour tout complexe z:

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$$

c) Déterminer les nombres z_0, z_1, z_2 solutions de l'équation $P(z) = 0$ sachant que $|z_0| < |z_1| < |z_2|$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soient A,B,C les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2. Placer A,B et C sur le repère et montrer que les points O,A,B,C sont cocycliques.

3) On pose $Z = \dfrac{z - z_2}{z - z_1}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $\arg Z = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$

b) $2\arg Z = 2(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$

c) $\arg Z = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

d) $|Z| = 2$

EXERCICE 5 (6 POINTS)

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation E: $z^2 - 8iz - 16 - 2i = 0$. On note z_1 et z_2 ses solutions avec $|z_2| < |z_1|$.

2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A et B les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Le point Ω milieu de $[AB]$.

Soit f l'application qui à tout point M du plan P, d'affixe z , ($z \neq 4i$), associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{4iz+16+2i}{z-4i}$. On note f(M)=M'.

a)Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

b) Montrer que les points A ;B ;M et M' sont cocycliques ou alignés .

3.a) Montrer que $(z'-4i)(z-4i) = 2i$, en déduire que $\Omega M \times \Omega M' = 2$.

b) Montrer que : $(\vec{u},\overrightarrow{\Omega M}) + (\vec{u},\overrightarrow{\Omega M'}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$. En déduire une construction géométrique, justifiée, du point M' à partir d'une position donnée de M extérieure à la droite (AB).

4) Déterminer et construire lieu géométrique Γ' du point M' dans chacun des cas suivants du point M :

a) M décrit le cercle de centre Ω et de rayon r

b) M décrit la droite passant par Ω et parallèle à la première bissectrice ; $M \neq \Omega$.

c) M décrit la droite passant par Ω et parallèle à (Ox) ; $M \neq \Omega$.

Fin.

www.devoir@t.net © 2012

-Lycée : *ELAMEL Fouchana*	DEVOIR DE CONTROLE N°1	Prof : **B.Zouhaier**
-Classe :*4éme MATHS*		*Novembre 2013*

Exercice N°1 : (3 points)

Répondre par vrai ou faux (avec justification)

1. Soit l'équation E d'inconnue z définie par $z^3=\bar{z}$

   a-$e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une solution de E

   b-si $\propto$ est une solution non nulle de E alors $|\alpha| = 1$

   c-si $|\alpha| = 1$ alors α est une solution de E

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u}, \vec{v})$. Soit A et B deux points du plan d'affixes respectives a et b telles que $\frac{a}{b} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

   a-O,A et B ne sont pas alignés

   b-OAB est un triangle rectangle en O

   c-OAB est un triangle équilatéral

Exercice N°2 : (6 points)

Soit U la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall$ n$\in \mathbb{N}$, $U_n > 0$
2. a-Montrer que U_{n+1}^2 - $U_n^2 \geq 4$

   b-En déduire que $U_n \geq 2\sqrt{n}$

   c-Déterminer alors la limite de la suite U

3. Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2

   a-Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}^*$; $V_n \leq 4 + \frac{1}{n}$

   b-Déterminer alors la limite de la suite V

4. a-Montrer que pour tout n≥ 1 ; $\frac{1}{2n} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

   b-En déduire que $\sum_{K=1}^{n} \frac{1}{K} \leq 2\sqrt{n}$

5. Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{K=1}^{n} V_K$

   a-Montrer que $S_n \leq 4n + 2\sqrt{n}$

   b-Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{U_n^2}{n}\right)$

Exercice N°3 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u}, \vec{v})$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Soit A,M et N les points d'affixes respectives -1, z et z'. où z est un nombre complexe différent de -1 et z'= $\frac{z^2}{z+1}$

1. a-montrer que z' est réel ssi z = $\bar{z}$ ou z$\bar{z}$ = -(z+$\bar{z}$)

   b-En déduire l'ensemble E des points M d'affixe z tel que z' est réel

2. Soit z un complexe non nul vérifiant z$\bar{z}$ = -(z+$\bar{z}$) et soit θ un argument de z $\theta \in]-\pi,\pi[$

   a-Montrer que $|z|$ = -2cosθ

   b-En déduire que z'=-cos$^2\theta$

   c-Montrer que M varie sur le cercle de centre A et de rayon 1, alors $\mathbb{N}$ varie sur un segment que l'on précisera

3. On suppose que M est distinct d'O. montrer que si le triangle OMA est rectangle en M, alors le triangle OMN est rectangle en O.

Exercice N°4 : (5points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-2x}+x & si\ x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x}\,sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x-1} & si\ x \in]-\infty,0[\ \setminus\{1\} \end{cases}$$

1. a-Montrer que pour tout réel x de]0,1[$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ ≤ f(x) ≤ -$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

   b-Montrer que f est continue en 0

   c-Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\, f(x)$

2. On pose U(x)=$\frac{\pi(x-1)}{x}$; V(x)= $\frac{sinx}{x}$ et W(x)= $\frac{\pi}{\sqrt{x}}$ pour tout x ∈]0,+∞[\ {1}

   a-Montrer que pour tout x ∈]0,+∞[\ {1} ; f(x) = W(x).(VoU)(x)

   b- En déduire que f admet un prolongement par continuité g en 1

   c-A l'aide de g, montrer que l'équation $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = 3\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ admet dans l'intervalle]1,2[une solution.

Bon travail

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

L.S.Jammel 3	Devoir de Contrôle 1	Afli Ahmed
07/11/2013	Durée :2h	4 Maths

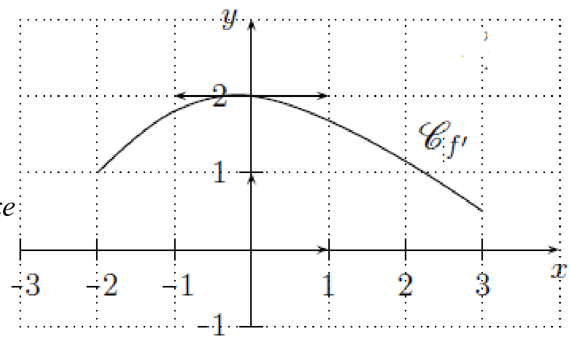
NB : Il sera tenu compte de la rédaction et la rigueur de raisonnement :☺

Exercice 1 :

Soit f une fonction deux fois dérivables sur [-2:3]

La courbe ci-contre est celle de f ' (fonction dérivée de f)

Répondre par **Vrai** *ou* **Faux** *en justifiant la réponse*



- 1./ $f(-1) < f(2)$
- 2./ La courbe (C_f) admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses
- 3./ $|f(3) - f(-2)| \leq 10$
- 4./ f réalise une bijection de [-2,3] sur f([-2,3])

Exercice 2 :

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + Cos(U_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1. / Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + cos(x)$ est croissante sur R .

2. / a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b. Etudier la monotonie de (U_n).

c. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. / a. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} cos(U_k) = U_{n+1}$

b. Calcule $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} cos(U_k)$

4. / x un réel donné,

Développer $(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^2$ puis déduire que $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{cos(x)+1}{2}$

5. / Pour tout n de ℕ, on pose $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} cos^2(\frac{U_k}{2})$

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$

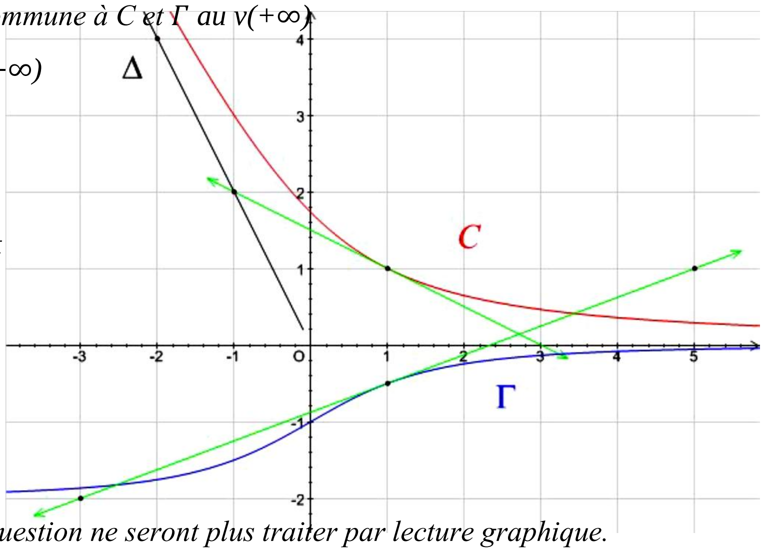
b. Calculer alors $\lim_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim_{n \to +\infty} nV_n$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice 3:

Dans la figure ci-contre :

- *C est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f ,*
- *Γ est la courbe de sa fonction dérivée .*
- *L'axe des abscisses est une asymptote commune à C et Γ au v(+∞)*
- *La droite Δ est une asymptote à C au v(−∞)*



A.) *Par lecture graphique, déterminer :*

1./ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

2./ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f\circ f(x)}{f(x)}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x+1)$

3./ f(1) , f '(1) et f ''(1)

B.) On donne f(x) = $\sqrt{x^2+3}-x$

N.B : Dans la suite de l'exercice toutes les question ne seront plus traiter par lecture graphique.

1. / a. Calculer f '(x) pour $x \in \mathbb{R}$

b. Calculer f ''(x) pour $x\in \mathbb{R}$ et en déduire que f ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

c. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ on a :

$$|f(x)-1| \le \frac{3}{4}|x-1|$$

2. / Soit la fonction g continue sur [0,1] , dérivable sur]0,1[tel que : g(0) = 1 et g(1) = $\sqrt{3}$

a. Montrer qu'il existe au moins un réel a ∈]0,1[tel que f(a) = g(a)

b. Monter qu'il existe au moins un réel b ∈]0,1[tel que f ' (b) = - g '(b)

3. / On pose u(x) = x.sin($\frac{2}{x}$) et v(x) = $-\frac{1}{x^2} + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

a. A l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 des fonctions u et v.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (u\circ f)(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0}(f\circ v)(x)$.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,on donne les points A(2i) et B(i)

Soit l'application f \{B} : P → P , tel que $z' = \frac{iz+2}{z-i}$

M(z) ⟼ M ' (z ')

1. / Déterminer les points invariants par l'application f et exprimer leurs affixes sous forme algébrique et trigonométrique

2. / a. Montrer que pour tout z ≠ i et z ≠ 2i , $|z'| = \frac{AM}{BM}$ et $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM})[2\pi]$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(z) tel que |z '| = 1

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) lorsque M ' décrit la droite $(O,\vec{v})\backslash\{O\}$

3. / a. Calculer (z'-i)(z-i) pour z ≠ i

b. En déduire l'image, par f, du cercle 𝒞 de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$.

Avec mes encouragements

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

DEVOIR DE CONTROLE N° 1

Exercice 1

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Indiquer sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1. Si ABCD est un carrée de coté $a > 0$ alors $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BD} =$

   (a) $-a^2$ **(b)** $a\sqrt{2}$ **(c)** $-a\sqrt{2}$

2. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires de sens contraires tels que $\| \overrightarrow{u} \| = 2$ et $\| \overrightarrow{v} \| = 1$.
   Alors $(\overrightarrow{u} + 3\overrightarrow{v})^2 =$

   (a) 25 **(b)** 13 **(c)** 1

3. Soit f la fonction définie sur $(1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$. Alors on a :

   (a) 0 est un minimum de f **(b)** 1 est un maximum de f **(c)** f est bornée

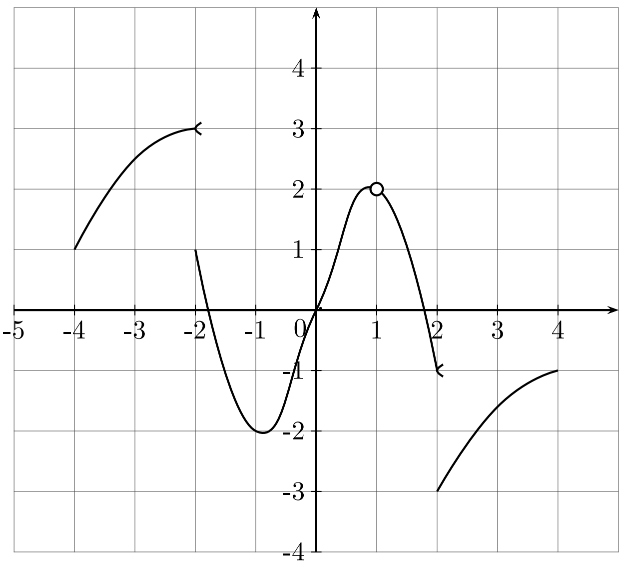
4. Soit f une fonction continue sur l'intervalle [1,2[. Alors :

   (a) f est continue à gauche en 1 **(b)** f est continue en 1 **(c)** $\lim\limits_{x\to 1^+} f = f(1)$

Exercice 2

La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction f définie sur $[-4, 4] \setminus \{1\}$.

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.



1. Déterminer les limites à droite et à gauches de f en -2 et 2.
2. Quels sont les intervalles sur lesquels f est continue ?
3. 3 est-il le maximum de f ? justifier.
4. f est-elle prolongeable par continuité en 1 ? Justifier.
5. Déterminer $f([-2, 0])$ et $f(]1, 4])$

Exercice 3

I- Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par : $g(x) = \sqrt{x^2+4} - x$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a : $x^2 + 4 \geqslant (x+2)^2$.
2. En déduire que la fonction g est minorée par 2.
3. 2 est-il un minimum de g sur $]-\infty, 0]$? justifier.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

2013/2014 | 3° Maths
Lycée EL ALIA | Durée : 2 heures

DEVOIR DE CONTROLE N° 1

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par : $\begin{cases} f(x) = g(x) & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = \dfrac{x^2+2x-8}{x^2-4} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1. (a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$, $]0, 2[$ et $]2, +\infty[$.

   (b) Montrer que f est continue en 0.

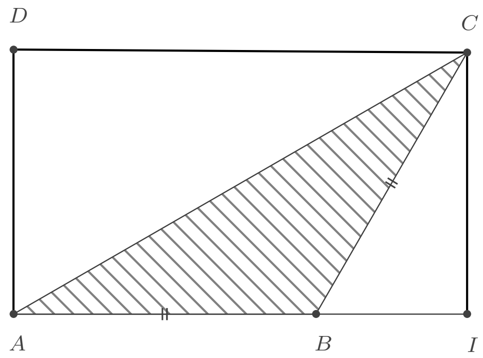
   (c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2.

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet dans $[-1, 1]$ au moins une solution α.

   (b) On admet que α est unique.

   Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,5$.

Exercice 4



Dans la figure ci-contre AICJ est un rectangle tel que $AC = 4\sqrt{3}$ et B un point de $[AI]$ tel que $AB = AC = 4$.

1. (a) Montrer que $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

   (b) En déduire que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -8$

   (c) Montrer alors que $\cos(\widehat{ABC}) = -\dfrac{1}{2}$ et que $BI = 2$.

2. (a) Montrer que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CI} = 12$ et que $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CJ} = 12$.

   (b) En déduire que $(CB) \perp (IJ)$

3. Soit $\Delta = \{M \in \mathcal{P}\,;MA^2 - MB^2 = 32\}$.

   (a) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$, $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}$ avec O est le milieu de [AB].

   (b) Montrer que $C \in \Delta$.

   (c) Montrer que Δ est une droite que l'on précisera.

4. Soit $\Gamma = \{M \in \mathcal{P}\,;MA^2 + MB^2 = 64\}$.

   (a) Montrer que $C \in \Gamma$.

   (b) Montrer que Γ est un cercle que l'on précisera.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Classe : 4ème Maths 1 Devoir de contrôle N°1 Pr : Marzouk Ali

Lycée cité El Amel Gabés le 17/11/2013 Durée : 2h

<u>Exercice n°2</u> :(4 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - (1+i)\,(i + e^{i\theta})\,z + i\,(i + e^{i\theta})^2 = 0$ avec $\theta \in \,]0, \pi[$

1) a)Résoudre l'équation (E).

b) Ecrire les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o\,;\,\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A ; M' M'' d'affixes respectives $a = -1 + i$, $z' = i + e^{i\theta}$ et $z'' = i\,(i + e^{i\theta})$

Déterminer et construire les ensembles des points M' et M'' lorsque θ décrit $]0, \pi[$

3)a)Montrer que OM'M'' est un triangle rectangle isocèle en O.

b) Montrer que $\dfrac{z' - a}{z'' - a} = -\cot\!\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ .En déduire que les points A, M' et M'' sont alignés.

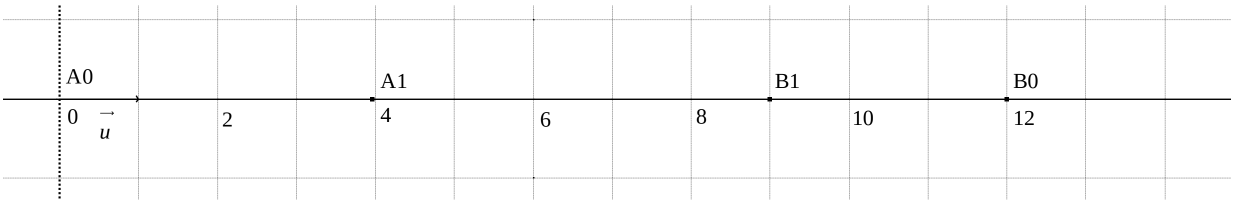
c)Déterminer l'affixe du point M pour que OM'MM'' est un carré.

<u>Exercice n°1</u> :(5 points)

1) On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $(O\,;\,\vec{u})$ donné ci-dessous, le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12.

Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

a) Sur le graphique placer les points A_2, B_2. (Reproduire la figure sur votre copie)



b) On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n.

Montrer que : $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique, préciser la raison.

b) Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

3)a)Montrer que pour tout entier naturel n : $a_n \le b_n$

b)Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

4) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 3a_n + 4b_n$.

a)Montrer que la suite (v_n) est constante.

b) Déterminer la limite commune des suites (a_n) et (b_n).

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

Exercice n°3 :(5 points)

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$

E = C * D, F = C * B et I le point du plan tel que CIA soit un triangle équilatéral direct

1) a)Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AI}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}(2\pi)$ Montrer que : $r_{\left(A,\ \frac{\pi}{6}\right)} = S_{(AI)} o\, S_{(AD)}$

Déterminer la droite Δ telle que $r_{\left(I,\ \frac{\pi}{3}\right)} = S_{\Delta}\ o\ S_{(IA)}$

b) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h = r_{\left(I,\ \frac{\pi}{3}\right)} o r_{\left(A,\ \frac{\pi}{6}\right)}$

2)a)Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f(E) = F

b)Montrer que f est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c)Montrer que f(D) = C

3) Soit g le antidéplacement tel que g(D) = C et g(C) = B

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) On désigne par Δ et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de g.

Montrer que $g\ o\ g = t_{2\vec{u}}$ et déterminer $\vec{u}$ et Δ

Exercice n°4 :(6 points)

Soit la fonction f définie sur [0, π [par f(x) = $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) a)Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que f réalise une bijection de [0, π [sur [0, +∞ [

c)Montrer que f^{-1} est dérivable sur [0, +∞ [et que pour tout x ≥ 0 : $(f^{-1})' = \frac{2}{1+x^2}$

2) Pour tout x ∈]0, +∞ [, on pose $g(x) = f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

a) Montrer que g est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et calculer g '(x)

b) Calculer $f^{-1}(1)$ .En déduire que pour tout x > 0 : $f^{-1}(\sqrt{x}) + f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \pi$

3) On pose pout tout entier non nul n : $a_n = \frac{1}{n+1}\sum_{n}^{2n} f^{-1}\left(\sqrt{k}\right)$ et $b_n = \frac{1}{n+1}\sum_{n}^{2n} f^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

a)Montrer que pour tout entier non nul n : $f^{-1}(\sqrt{n}) \leq a_n \leq f^{-1}(\sqrt{2n})$

b) En déduire que (a_n) est convergente et calculer sa limite.

c)Exprimer b_n en fonction de a_n et déterminer la limite de b_n.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

EXERCICE NI L'espace euclidien E est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Que peut-on dire des points: O ; A ; B et C dans les cas suivants:

a) $\vec{OB}.\vec{OC} = 0$ b) $\vec{OB} \wedge \vec{OC} = \vec{0}$ c) $\vec{OA}.(\vec{OB} \wedge \vec{OC}) = 0$

On considère les points: A(- 2 ; 1 ; 1) ; B(1 ; - 1 ; 0) et C(- 2 ; 0 ; 0)

1) Déterminer l'équation du plan P contenant A ; B et C

2) Déterminer l'angle entre P et le plan d'équation $z = 0$

Une sphère K a son centre en Ω(3 ; - 4 ; t) et son intersection avec le plan $z = 0$ est un cercle de rayon 3

3) Déterminer l'équation de la sphère (K)

4) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la sphère (K) et l'axe z'Oz n'ont aucun point en commun

5) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la sphère (K) et le plan: $- x + 4y + z - 2 = 0$ ont exactement un point en commun

Soit (S) la sphère pour laquelle les deux conditions de 4) et 5) sont réalisées

6) Déterminer une équation du plan qui est tangent à la sphère (S) et est parallèle au plan: $- x + 4y + z - 2 = 0$, mais distinct de ce dernier

7) Déterminer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre ABCΩ

EXERCICE NII On considère une famille de fonctions réelles définies par: $f_\lambda : x \mapsto e^{2x} - (\lambda + 1)\, e^{x} + 3\lambda$

avec λ , paramètre réel vérifiant $\lambda > - 1$

On note F_λ la représentation graphique de la fonction f_λ dans un repère orthonormé

a) On considère d'abord le cas où $\lambda = 0$

i) Etudier f_0 et F_0 : ensemble de définition, signe, asymptote, intersection avec les axes,

www.devoir@t.net © 2011

croissance, décroissance, extremum
Préciser les coordonnées du point d'inflexion

ii) En déduire le tracé de F_0

iii) k étant un réel strictement négatif, déterminer l'aire $A(k)$ du domaine plan D_k , compris entre F_0 , l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = k$ et $x = 0$

iv) Déterminer $\lim\limits_{k\to-\infty} A(k)$

v) k étant un réel strictement négatif, déterminer $V(k)$, le volume du solide S_k , engendré par la

rotation de D_k autour de l'axe (Ox)

vi) Déterminer $\lim\limits_{k\to-\infty} V(k)$

b) Montrer que les courbes F_λ , ont toutes une asymptote parallèle à l'axe des abscisses

c) Pour chaque valeur de $\lambda > -1$, déterminer l'abscisse du point M_λ de F_λ qui a une tangente parallèle à l'axe des x et montrer que cette abscisse correspond à un minimum pour la fonction f_λ

EXERCICE NIII

On donne la fonction d'une variable réelle x : $f : x \mapsto \begin{cases} (x^2+1)e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

F est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 2 cm)

a) Etudier: i) La continuité de f en $x = 0$ ii) La dérivabilité de f en $x = 0$

b)i) Etudier la fonction f (Limites aux bornes de son domaine de définition, l'asymptote de F , sens de variation de f , extremum et les points d'inflexion de F)

ii) Esquisser le graphe de f

c)i) Déterminer l'abscisse des points d'intersection de F et de la droite $d : y = 1 - \frac{x}{2}$

ii) $0 < \lambda \leq e^{\frac{1}{2}}$

Exprimer en fonction de λ , l'aire $A(\lambda)$ du domaine $D = \left\{ M(x;y) / \left\{ \begin{array}{c} \lambda \leq x \leq e^{\frac{1}{2}} \\ 1 - \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - x\ln x \end{array} \right. \right\}$

iii) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$

EXERCICE NIV

1)a) Déterminer le domaine de définition de la fonction: $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

b)i) Démontrer que f est une fonction impaire et périodique de période 2π

ii) Démontrer que le graphe de f admet la droite d'équation: $x = \dfrac{\pi}{2}$, comme axe de symétrie

iii) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\left] 0 ; \dfrac{\pi}{2} \right]$

iv) Construire le graphe de f sur $[-\pi ; \pi]$

2)a) Déterminer les réels a ; b et c tels que: $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{ -1 ; 1 \}$ $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} = a + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{x+1}$

b)i) Calculer l'aire du domaine D , limité par le graphe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations: $x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$

(On effectuera le changement de variable: $u = \cos t$, dans l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\, dt$)

ii) Calculer la valeur moyenne de f sur $\left[\dfrac{\pi}{4} ; \dfrac{\pi}{2} \right]$

c) Calculer la mesure du volume du solide de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des abscisses (On montrera que: $\dfrac{\cos^4 t}{\sin^2 t} = \dfrac{1}{\sin^2 t} - 2 + \sin^2 t$,

puis on effectuera le changement de variable: $u = \tan t$, dans l'intégrale: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\sin^2 t}\, dt$

www.devoir@t.net © 2011

Prof :Khammour.Khalil **Année Scolaire** :2013/2014	**Devoir à la maison n°2** Bézout + ln + Espace	$4^{ème}$ Math **Tunis ,Tél :27509639**

Exercice n°1 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. Indiquer sur votre copie, le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

1) $\int_{\ln 4}^{\ln 2} \frac{1}{t}\,dt$ est égale à :
   a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) 1.
2) Soit f la fonction définie sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\tan x}$. Une primitive F de la fonction f sur $]\frac{\pi}{2},\pi[$ est :
   a) $F(x) = \sin(\ln x)$ b) $F(x) = \ln(\sin x)$ c) $F(x) = \ln(\cos x)$.
3) $\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ est égale à :
   a) $\ln 2$ b) $-\ln 2$ c) $\frac{3}{8}$.
4) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.Soit A(-1,2,3) et B(1,4 ,0) ,le plan médiateur de [AB] a pour équation :
   a) 2x+2y-3z+14=0 b) $2x+2y-3z-\frac{3}{2} = 0$ c) x+y-3z+11=0.
5) L'ensemble des couples d'entiers relatifs (x ; y) solutions de l'équation $12x - 5y = 3$ est l'ensemble des couples :
   a) (4+10k ; 9+24k) b) (9+5k ; 21+12k) c) (4+5k ; 5+4k) ou ($k \in \mathbb{Z}$).

Exercice n°2 :

On considère, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $148x - 97y = 1$.

1) a) En utilisant l'algorithme d'Euclide ,montrer que le couple (-19,-29) est une solution particulière de (E).
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,l'équation (E).
   c) Déterminer un inverse modulo 148 de 97.
2) a) Vérifier que 149 est un nombre premier.
   b) Soit p un entier naturel non nul tel que $p \leq 148$. Montrer que $p^{148} \equiv 1[149]$.
3) Soit $a \in \{2,3,4, \dots\dots\dots ,148\}$, on pose $S(a) = 1 + a + a^2 \dots\dots + a^{147}$.
   a) Montrer que $a^{148} - (a-1)S(a) = 1$.
   b) En déduire que a^{148} et (a-1) sont premiers entre eux.
   c) Montrer que 149 divise S(a).
4) Soit dans $\mathbb{Z}$ le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{37} \\ n \equiv 6 \pmod{4} \\ n \equiv 7 \pmod{97} \end{cases}$
   a) Montrer que (S) est équivalent à (S') : $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{148} \\ n \equiv 7 \pmod{97} \end{cases}$
   b) Résoudre alors (S) en utilisant les résultats du 1).

Exercice n°3 :

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.Soit I=B*F et J tel que $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$.

1) a) Déterminer les coordonnées des points I et J et du vecteur $\overrightarrow{AI} \wedge \overrightarrow{AJ}$.

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014

b) Montrer que l'aire du triangle AIJ est $\frac{\sqrt{14}}{3}$.

2) Montrer que le volume du tétraèdre AIJE est $\frac{1}{9}$ puis déduire la distance du point E au plan AIJ.

3) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est $x + 3y - 2z = 0$ .Calculer la distance de E au plan AIJ.

4) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 2 = 0$.

a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.

b) Montrer que S et (AIJ) sont sécants suivants un cercle que l'on précisera.

Exercice n°4 :

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(2x + 1) - \ln x$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) a) Dresser le tableau de variation de f , en déduire que pour tout x>0 ,f(x)>0.

b) Montrer que pour tout x>1 ,$\ln 2 \leq f(x) \leq \ln 3$.

2) a) Montrer que l'équation f(x) =x admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α tel que $1 < \alpha < 1{,}1$.

b) En déduire la position relative entre la courbe (C) et la droite D : y=x.

3) a) Montrer que f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur I à préciser .Calculer $f^{-1}(x)$ pour x de I.

b) Tracer (C) et (C') la courbe de f^{-1}.

4) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = \left(\frac{2x+1}{2}\right)\ln(2x+1) - x\ln x & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.

b) Dresser le tableau de variation de F.

5) Soit la suite (I_n) définie sur IN par $I_0 = 1$ et pour tout n de IN $I_{n+1} = I_n + \ln\left(2 + \frac{1}{I_n}\right)$.

a) Montrer que pour tout n de IN , $I_n \geq 1$.

b) Montrer que (I_n) est croissante.

c) Montrer en utilisant 1) b) , que pour tout n de IN , $1 + n\ln 2 \leq I_n \leq 1 + n\ln 3$.

d) En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{I_n}$.

Exercice n°5 :

On se propose, dans cette question, de déterminer tous les entiers relatifs N tels que : $\begin{cases} N \equiv 5 (\mathrm{mod}\,13) \\ N \equiv 1 (\mathrm{mod}\,17) \end{cases}$

a) Vérifier que 239 est solution de ce système.

b) Soit N un entier relative solution de ce système.

Démontrer que N peut s'écrire sous la forme N = 1+17x = 5+13y où *x* et *y* sont deux entiers relatifs vérifiant la relation $17x - 13y = 4$.

c) Résoudre l'équation $17x - 13y = 4$ où *x* et *y* sont des entiers relatifs.

d) En déduire qu'il existe un entier relatif *k* tel que $N = 18 + 221k$.

e) Démontrer l'équivalence entre $N \equiv 18 \pmod{221}$ et $\begin{cases} N \equiv 5 (\mathrm{mod}\,13) \\ N \equiv 1 (\mathrm{mod}\,17) \end{cases}$

2) Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

a) Existe-t-il un entier naturel k tel que $10^k \equiv 1$ (17) ?

b) Existe-t-il un entier naturel k' tel que $10^{k'} \equiv 18$ (221) ?

WWW.DEVOIR@T.NET © 2014