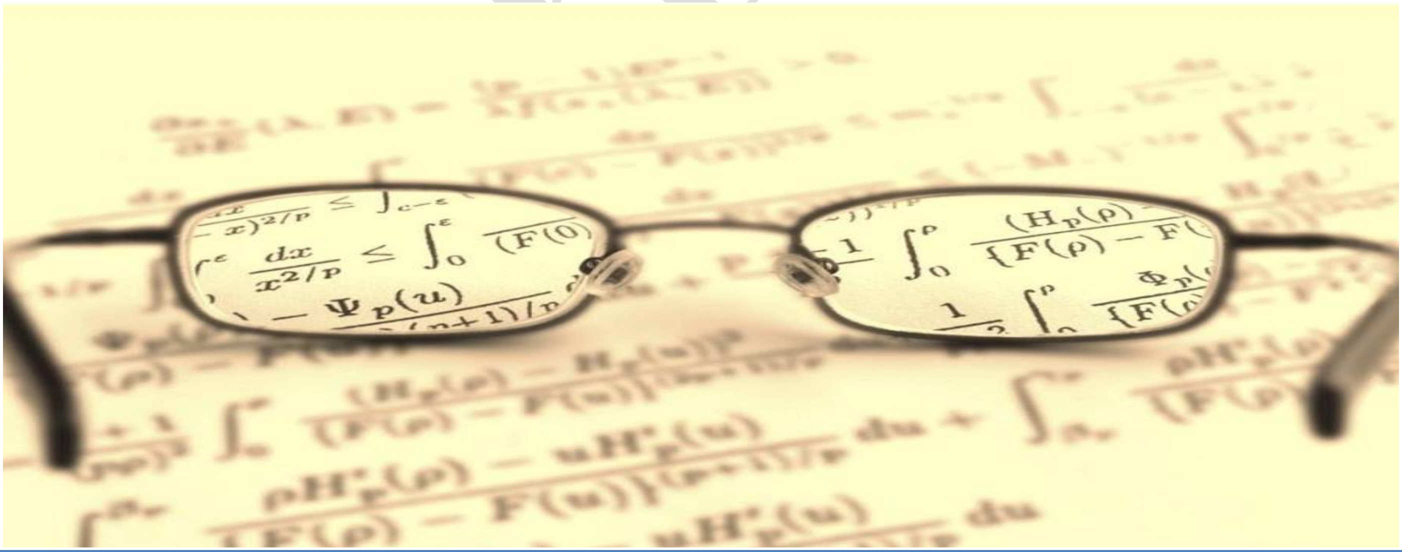
Révision mathématiques
Bac MATHS 2015-2016

Prof : HADJ SALEM Habib

Lycée Médenine



" Tu as droit au succès et tu as droit au bonheur. Tu le mérites !

Cherry Blossom

Sommaire

COMPLEXES

Exercice 1 : On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation: (E) : (1-i) z^2 -2($\cos\theta$ + $\sin\theta$)z +1+i =O où θ est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $\left[0,\pi\right]$. On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec Im(z_1)>0 , pour tous les réels θ.

1) a) Sans calculer z_1 et z_2 , montrer que $z_2=\frac{i}{z_1}$.

b) Trouver alors une relation entre les modules et les arguments de z_1 et z_2.

2) a) Déterminer z_1 et z_2. Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) Préciser la valeur de θ pour que $z_1 = z_2$.

Exercice 2:

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)z+2i=0$

II) Soit θ un paramètre réel au quel on associe l'équation : $(E_\theta): z^2-2e^{i\theta}z+2e^{2i\theta}=0$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ). On note z_1 et z_2 les deux solutions .

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle .

2) Soient M_1 et M_2 les points images respectifs de z_1 et z_2 dans le plan complexe.

a) Calculer Arg($\frac{z_1}{z_2}$) . En déduire une mesure de $\left(\overrightarrow{OM_1};\overrightarrow{OM_2}\right)$.

b) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3:

P désigne le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$, α un réel de l'intervalle

$\left]0,2\pi\right[$ et ζ le cercle de centre B et de rayon 1.

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : z^2 - i(2- $e^{i\alpha}$)z + $e^{i\alpha}$ -1=0

2) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

II) Soit f l'application de P\{B} vers P\{A} qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z'=\frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}$

1) a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

b) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$, on a $z'-1=\frac{-2i}{\bar{z}+i}$

c) En déduire que $\forall$ M$\in$ P\{B} , on a : AM'.BM= 2 et $\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

d) Construire le point M' à l'aide d'un point M du cercle ζ .

2) Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $\left(\bar{z}-i\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)(\bar{z}+i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de E alors z est réel.

b) Montrer que si z '= $e^{i\alpha}\Leftrightarrow z=-\cot g(\frac{\alpha}{2})$

c) Résoudre alors l'équation (E).

d) Utiliser ce qui précède pour construire le point Ω antécédent par f du point Ω' d'affixe $\omega'=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 4(bac 2013)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i. On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1. Soit θ un réel de l'intervalle $[0,2\pi[$, M le point d'affixe $1+e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1+e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)$ et $\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)$

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $\left[0,2\pi\right[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2.

c) Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_p telle que $Z_P = (1-i)\sin\theta . e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\dfrac{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\mathrm{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}$.

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 (bac 2011) :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1 .

1) a) Montrer que : (le triangle MNP est rectangle en P) si et seulement si ($\dfrac{1+z}{z}$ est imaginaire pur).

b) On pose z = x + iy où x et y sont des réels. Montrer que; $\dfrac{1+z}{z} = \dfrac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre [OA], privé des points O et A.

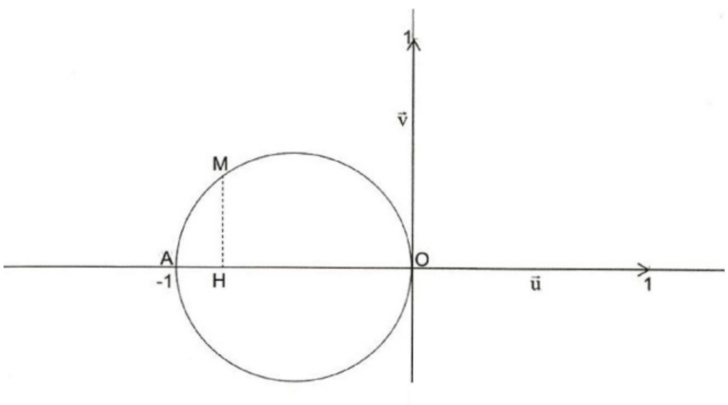
2) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, on a tracé le cercle (Γ) et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$.On se propose de construire les points N et P d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]$

b) Montrer que OH = OM^2.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire .

Figure 2



Exercice 6 :

1) Soit θ un réel appartenant a $]0,\pi[$. On considère l`équation (E_θ) : $z^2 - 2z - 2i\sin\theta e^{i\theta} = 0$

On note z_1 et z_2 les solutions de (E_θ) .

a- Sans calculer z_1 et z_2, montrer que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

b - Résoudre dans IC l équation (E_θ) .

2)-Le plan complexe étant rapporte a un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,on désigne par A,M et N les points d`affixes respectives : $z_A = 2$. $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$.

a- Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.

b- Déterminer l` ensemble des points M lorsque θ varie dans $]0,\pi[$.

c- Donner la nature du quadrilatère OMAN .

d- Trouver θ sachant que le quadrilatère OMAN est un carré

Exercice 7 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ .On note A le point d'affixe - 2 .

On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$

1) Montrer que si $\alpha \in \mathrm{IR}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.

Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à IR.

2) Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors a est une solution de l'équation (E).

3) Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A, M, N et P.

b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\overline{\alpha}$ est une solution de (E).

b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 8 :

1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2-2z+4=0$.

b- Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

3) Soit $\theta \in]-\pi,\pi[$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$.

4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

a) Vérifier que r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que r(F)=K.

c) En déduire la nature du triangle AFK.

5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour la quelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 9 :

On considère $\alpha = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

1) Ecrire α et β sous forme exponentielle.

2) Soit $\theta \in \left]0, \pi\right[$

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$, on désignera par z_1 la solution ayant une parte imaginaire négative et par z_2 l'autre solution .

b) Déterminer θ pour que l'on ait : $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

Exercice 10 :

1/ Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $2z^2 - 2(1+i)z + \frac{1}{2} + i = 0$.

2/ Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et E_θ l'équation : $2z^2 - (1 + 2\cos\theta + 2i)z + \cos\theta + i = 0$, avec $z \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que l'équation E_θ admet une racine réelle que l'on calculera.

b) Calculer l'autre racine en fonction de θ.

3/ Dans le plan complexe rapporté à un repère direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et M d'affixes respectives $\frac{1}{2}$ et $\cos\theta + i$.

a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque le réel θ varie dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calculer AM en fonction de θ et en déduire la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

Arithmétique

Exercice 1 :

1) Vérifier que : $13^6 \equiv 1$ (mod 7)

2) En déduire le reste modulo 7 de l'entier 13^{2009} .

3) Soit n un entier, on pose a = 2n-3 et b = 3n-1.

a- Montrer que tout diviseur de a et b , divise 7.

b- En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$

c- Pour quelles valeurs de n, a-t-on $a \wedge b = 7$.

4) Pour $a = 2.13^{2009} - 3$ et $b = 3.13^{2009} - 1$. Trouver $a \wedge b$.

Exercice 2 :

On considère l'équation dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$, (E) : 36x -25y =5 où (x,y) est le couple d'inconnues.

1) a) Déterminer une solution particulière de l'équation (E') : 36x-25y=1

b)En déduire un couple (x_0 ,y_0) , solution particulière de E .

c) Résoudre alors E dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$.

2) Soit (x,y) un couple solution de E et $d= x \wedge y$

a) Montrer que d=1 ou d=5.

b) Déterminer les couples (x,y) , solutions de (E) tels que x et y soient premiers entre eux.

Exercice 3 :

On considère l'équation (E) : 8x + 5y = 1 où x et y sont des entiers relatifs.

1) a) Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) a des solutions.

b) Donner une solution particulière de (E).

c) Résoudre dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$ l'équation (E).

2) a) Résoudre dans Z : (S) $\begin{cases} x \equiv 1(\text{mod}8) \\ x \equiv 2(\text{mod}5) \end{cases}$

b) Dans le cas où x est un entier solution de (S),déterminer le reste de la division euclidienne de x par 40.

3) On considère l'équation (E') : 8x + 5y = 100.

a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$ l'équation (E').

b) Un groupe de garçons et de filles a dépensé 100 dinars dans une excursion. Chaque garçon a dépensé 8 dinars et chaque fille a dépensée 5 dinars. Donner les répartitions des groupes possibles.

Exercice n°4

On considère les nombres a=2n-3 et b=3n-1 ; on not $d= a \wedge b$; pour tout entier n.

1) a) Calculer 3a-2b ; en déduire les valeurs possibles de d .

b) Déterminer les entiers n tel que ; $2n \equiv 3(\text{mod}7)$ et $3n \equiv 1(\text{mod}7)$

c) Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7 déduire des questions précédentes la valeur de r pour la quelle d=7.

2) a) Vérifier que pour tout n, le couple (a,b) est solution de l'équation (E) : 3x-2y =-7

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}$ de l'équation de E.

Exercice 5 :

1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 8$ (mod 41)

b) Etablir l'équivalence : $x^2 - 19x - 10 \equiv 0$ (mod 41) $\Leftrightarrow (x + 11)^2 \equiv 8$ (mod 41)

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $x^2 - 19x - 10 \equiv 0$ (mod 41)

2) Montrer que pour tout entier naturel n, l'entier $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7.

3) a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste modulo 7 de 2^n.

b) En déduire que si n n'est pas un multiple de 3 alors $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7.

Exercice 6

1) Soit $n \in IN$, déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 13 de 5^n.
2) Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$
   a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 13 de A_n .
   b) Déterminer alors l'ensemble des entiers naturels n tels que $A_n \equiv -1 (mod 13)$.
3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $(25)^n + (8)^n + (2007)^n \equiv -1 \ (mod 13)$

Exercice 7 :

1) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, l'équation E : 11x + 8y=3.
   a) Soit (x, y) une solution de E , quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.
   b) Montrer que les solutions de E sont les couples (x,y) tels que x= -8k+1 et y= 11k-1 avec $k \in \mathbb{Z}$

En déduire l'ensemble des entiers , tel que $x \wedge y = 3$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$, l'équation E' : 11x + 8y=79 .
   a) Déterminer l'inverse de 8 modulo 11
   En déduire que si (x, y) est une solution de E' alors $y \equiv 3 (\text{ mod } 11)$.
   b) Résoudre alors l'équation E'.
3) Déterminer le reste modulo 11 de 8^{10} ; En déduire que $8^9 \equiv 7$ (mod 11) que $8^{2009}-7$ est divisible par 11.

Exercice 8 (bac 201 contr)

1) Soit dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E) : 1111 x - 10^4y = 1.
   a) Vérifier que (- 9, -1) est une solution de (E).
   b) Résoudre l'équation (E) .
2) a)Soit n un entier. Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que n=1111p et n=1+q10^4 alors (p, q) est une solution de (E).

   b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que $\begin{cases} n \equiv 0 (\text{mod} 1111) \\ n \equiv 1 (\text{mod} 10^4) \end{cases}$

c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 9 :

1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E): 5x - 12y = 7$

a/ Déterminer une solution particulière de (E)

b/ Résoudre (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

a/ Soit n, x et y trois entiers tels que $\begin{cases} n = 5x + 4 \\ n = 12y + 11 \end{cases}$ Montrer que le couple (x, y) est une solution de (E)

b/ On considère le système (s) : $\begin{cases} n \equiv 4 (\text{mod } 5) \\ n \equiv 11 (\text{mod } 12) \end{cases}$

Montrer que n est une solution du système (s) si et seulement si $n \equiv 59 (\text{mod } 60)$

2) a/ soit k un entier naturel. Déterminer le reste de $4^{2k} \text{ mod} ulo 5$ et le reste de $11^{2k} \text{ mod} ulo 12$.
   b/ Vérifier que $599^{2011} + 1$ est divisible par 60

Probabilité- Statistiques

Exercice 1 : Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux blanches et trois noires.

1) On extrait au hasard et simultanément deux boules de l'urne.
   a) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
      A « tirer deux boules blanches »
      B « tirer deux boules de la même couleur »
   b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.
      Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance E(X) de X.
2) On effectue maintenant un tirage de deux boules de la façon suivante :
   On tire une première boule de l'urne , on note sa couleur , on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule de la même couleur que la boule tirée. On tire ensuite une seconde boule.
   On note B_1 : « tirer une boule blanche au premier tirage »
   B_2 : « tirer une boule blanche au deuxième tirage »
   a) Calculer $p(B_1)$, $p(B_2/B_1)$ et $p\left(B_2/\overline{B_1}\right)$
   b) En déduire que $p(B_2)=\frac{2}{5}$
   c) Calculer la probabilité de tirer une boule noire au second tirage.
   d) A la fin de l'épreuve, on a su qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule noire au premier tirage ?
3) On remet l'urne dans son état d'origine : contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.
   On répète l'épreuve de la question 2) n fois de suite ($n \geq 2$) de façon indépendante et dans les même conditions , en remettant après chaque épreuve dans son état original .On note Z la variable aléatoire égale aux nombres de réalisation de l'évènement B_2 .
   a) Exprimer p(Z=4) en fonction de n.
   b) Donner E(Z) et $\sigma(Z)$.
   c) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement B_2 ?
   d) Déterminer le plus petit entier n pour que $p_n \geq 0,99$

Exercice 2 :

Un responsable d'un magasin achète des MP_5 auprès de deux fournisseurs F_1 et F_2 dont 25% du fournisseur F_1.

La proportion des MP_5 du deuxième choix est de 2 % chez le fournisseur F_1 et de 4 % chez le second. On considère les événements :

D : " Le MP_5 est du deuxième choix"
F_1 : " le MP_5 provient du fournisseur F_1 "
F_2 : " le MP_5 provient du fournisseur F_2 "

1) a. Donner un arbre pondéré .
   b. Calculer $P(D \cap F_1)$ puis démontrer que $P(D) = 0,035$.
   c. Un MP_5 est du deuxième choix. Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?
2) Le responsable commande 20 MP_5, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient du deuxième choix.
3) Le responsable achète le MP_5 du premier fournisseur à 80 dinars et du second à 72^D et il vent le MP_5 à 125^D s'il est du premier choix et à 15^D si non .
   On désigne par X la variable aléatoire qui a chaque MP_5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable .
   a. Déterminer la loi de probabilité de X .
   b. Calculer l'espérance mathématique de X . Donner une interprétation de ce résultat .
4) La durée de vie en mois d'un MP_5 est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

a. La probabilité qu'un MP5 dépasse 5 mois de durée de vie est 0, 325. Déterminer λ .

On prend dans la suite $\lambda = 0{,}225$.

b. Quelle est la probabilité qu'un MP5 dure moins de 8 mois ?

c. Quelle est la probabilité qu'un MP5 dure au plus 2 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 mois.

Exercice 3 :

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé .

Pour t appartenant à [0 ;30] , on note y(t) le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc y(0)=0,01. On admet que la fonction y ainsi définie sur est dérivable , strictement positive est vérifie y ' = 0,05y(10-y) .

1) On considère la fonction z définie sur [0 ;30] par $z=\frac{1}{y}$ .Démontrer que :

y satisfait aux conditions y(0)=0 et y' = 0,05y(10-y) si et seulement si z satisfait aux conditions z(0)=100 et z'= -0,5 z + 0,05 .

2) a) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y.

b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche .

3) le quart de la population est vaccinée contre cette maladie contagieuse .De plus , on estime que sur la population vaccinée , 92% des individus ne tombent pas malades .Sur la population totale on estime aussi que 10% des individus sont malades .On choisit au hasard un individu de cette population.

a) Montrer que la probabilité de l'évènement A : « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.

b) Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 4

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher

- U_1 contient k boules blanches (k un entier naturel supérieur ou égal a 1)et trois boules noires.
- U_2 contient deux boules blanches et une boule noire..

On tire une boule au hasard dans U_1et on la place dans U_2.On tire ensuite au hasard une boule dans U_2.

On note *B_1(respectivement N_1)l'événement « on a tire une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 »

*B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tire une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 »

1) a) Calculer $p(N_2/B_1)$,$p(B_2/B_1)$,$p(N_2/N_1)$ et $p(B_2/N_1)$

b) Montrer que la probabilité de l'événement B_2 égale a $\frac{3k+6}{4k+12}$

2) Dans cette question on prend k = 12.
3) Un joueur mise 8 dinars et effectue une épreuve Si a la fin de l'épreuve le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne le joueur reçoit 12 dinars .Si non il ne reçoit rien et perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a) Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et - 8. .
b) Déterminer la loi de probabilité de X .
c) Calculer l'espérance mathématique de X ainsi que sa variance.
d) Le jeu est il favorable au joueur.

Exercice 5 :

Une machine est achetée à 3000 dinars. Le prix de revente y, exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

Ajustement affine

1). Représenter le nuage de points associé à la série statistique (xi; yi) dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 dinars sur l'axe des ordonnées.

2). Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.

3). Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Représenter la droite D dans le repère précédent.

Ajustement non affine

On pose z = ln (y) Montrer qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par
Z = - 0,22 x + 8,01.

1). Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x.B$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.

2) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 dinars.

3) Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 dinars.

Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse

Exercice 6 :

Suite à une panne technique, un distributeur de boissons ne tient aucun compte de la commande faite par le client .Cette machine distribue soit du café, soit de jus d'orange , soit du thé en suivant une programmation erronée. Chaque boisson peut être sucré ou non .

- La probabilité d'obtenir un café est $\frac{1}{2}$.
- La probabilité d'obtenir un thé sucré est $\frac{2}{9}$.
- Si l'on obtient un café , la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{5}{9}$
- Si l'on obtient un jus d'orange, la probabilité qu'il soit sucré est $\frac{1}{3}$.
- La probabilité d'obtenir une boisson sucrée est $\frac{5}{9}$

Soient les évènements suivants :

T : On a obtenu un thé. C : on obtenu un café.

J : on a obtenu un jus d'orange. S :La boisson obtenue est sucrée.

1) Construire un arbre de probabilité modélisant la situation.
2) Calculer la probabilité d'obtenir un café sucré.
3) Démontrer que la probabilité un jus d'orange sucré est $\frac{1}{18}$.
4) En déduire la probabilité d'obtenir un jus d'orange.
5) Une personne obtient une boisson sucrée. Quelle est la probabilité que cette boisson soit un thé ?
6) Une personne fait 10 commandes successives (les commandes sont indépendantes).

Quelles est la probabilité d'obtenir au moins un jus d'orange sucré.

Isométries -Similitudes

Exercice 1:

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.

1. Soit f est un déplacement, g antidéplacement tels que f(A) $= B$ et $g(B) = A$ avec $A \neq B$. Alors gof est une :
   a) symétrie glissante **b)** symétrie orthogonale **c)** translation.
2. Soit **f** l'application du plan complexe qui à M(z) associe le point M ($i\bar{z}$), alors **f** est une
   a. similitude indirecte de rapport 2 **b.** symétrie orthogonale d'axe y =x **c.** symétrie orthogonale d'axe y =-x
3. Soit f un point du plan et la similitude **f** = $R_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,-3)}$ Alors la forme réduire de **f** est :
   a) $R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,3)}$ **b)** $R_{\left(I,-\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,3)}$ **c)** $R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)} o h_{(I,-3)}$
4. Soit σ la similitude indirecte dont la forme complexe est $z' = 2i\bar{z}$:, alors une équation cartésienne de son axe est :
   a) $y = x + 1$. **b)** $y = -x+1$ **c) y = x**

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un carré ABCD de centre I et de sens direct. On désigne par J et K les milieux respectifs des côtés [AD] et [CD], soit E le point du plan tel que DBE soit un triangle équilatéral de sens direct

1/ On pose : $\Psi = t_{\overrightarrow{BC}} o S_{(AC)}$

a) Déterminer Ψ (A) et Ψ (D).

b) En déduire que Ψ est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

2/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoi B sur A et A sur D.

b) Caractériser R.

3/ On pose $g = R_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} o R_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4/ Soit $r = R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$ et on pose $t = g \circ r^{-1}$.

a) Déterminer t(A) puis caractériser t.

b) Pour tout M du plan P, on pose M_1= r(M) et M_2 = g(M). Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1 ?

Exercice 3 :

Dans un plan orienté, on donne un triangle équilatéral direct BCD. On désigne par I le centre de gravité de BCD
et par A le symétrique de I par rapport à la droite (BD)
Soit s la similitude directe qui envoie A sur B et B sur C.

1. a) Montrer que le rapport de s est $\sqrt{3}$ et qu'un angle de s est $\frac{\pi}{2}$

   b) Prouver que S(I) = D.
2. On désigne par J le milieu du segment [AI]. Déterminer S(J). En déduire le centre de s.
3. On considère l'application $\sigma = SoSoS_{(BD)}$.

a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) Déterminer σ(J) et σ(I) .

c) En déduire le centre et l'axe de σ .

Exercice4:

Dans le plan complexe *P* rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points *A* et *B* d'affixes respectives -1 et i. Soit f : $\begin{matrix} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{matrix}$ tel que z'= (1+i)z +i

1. (a) Déterminer la nature de **f** et préciser ses éléments caractéristiques.
   (b) Soit M un point distinct de A. Montrer que AMM' est rectangle isocèle en M.

2. On pose $M_0 = 0$ et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $z_n = (1+i)^n - 1$.
   (b) Montrer l'équivalence O, A, M_n sont alignés $\Leftrightarrow$ n est un multiple de 4.

Exercice5:

Le plan est rapporté à un repère-orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit f la similitude in directe qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -2i\bar{z} + 2i+1$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de *z.*

1. Déterminer le rapport de f.
2. a) Montrer que **f** admet un seul point invariant, on le note I. Calculer son affixe.
   b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\overrightarrow{IM'} = 2\overrightarrow{IM}$. En déduire une équation de l'axe de **f**.
3. On pose M_0 le point d'affixe 2 et on pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $M_{n+1} = f(M_n)$. On désigne par z_n l'affixe de M_n.
   (a) Caractériser **fof**.
   (b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $Z_{2n} = 4^n + 1$ et $Z_{2n+1} = 1 - 2 \times 4^n i$.

Exercice 6 : Dans le plan orienté, on considère un rectangle OABC tel que OA = 2OC et $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

La perpendiculaire à (OB) passant par B coupe la droite (OA) en J et la droite (OC) en J'.

A/ 1) Soit f la similitude directe qui envoie J en O et O en J'.

a) Déterminer l'angle de f.

b) Déterminer f(B) et en déduire le centre et le rapport de f.

2) Soit g la similitude indirecte qui envoie J en O et O en J'.

a) Donner le rapport de g.

b) En déduire que g admet un unique point invariant que l'on notera I.

c) Déterminer gog(J) et en déduire que I appartient à (JJ').

d) Construire le centre I et l'axe Δ de g.

B/ On rapporte le plan complexe au repère orthonormé $\left(O,\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)$

1) Montrer que les points J et J ont pour affixes respectives $\frac{5}{2}$ et 5i.

2) Donner la transformation complexe associée à f.

3) a) Donner la transformation complexe associée à g.

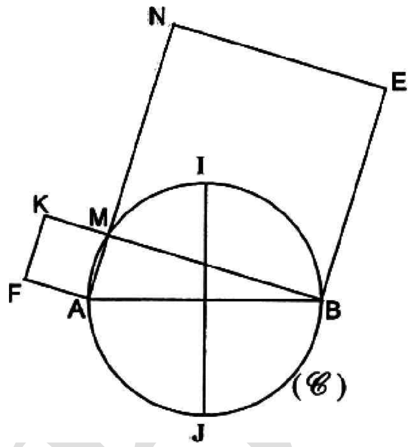
b) En déduire l'affixe du point I, centre de g.

c) Déterminer une équation de l'axe Δ de g.

Exercice 7 (bac 2010 princ) :

Le plan est orienté dans le sens direct.
Dans la figure ci-contre, [AB] et [IJ] sont deux diamètres perpendiculaires du cercle (C), M est un point variable du cercle (C) tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ [2TI] et MBEN et MKFA sont des carrés de sens direct.



1) Montrer que les points E, F et M sont alignés.

2) On désigne par r_1 et r_2 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs A et B.

a) Montrer que $r_1 o r_2$ est la symétrie centrale de centre I.
b) Déterminer r_2 (E). En déduire que lorsque M varie, la droite (EF) passe par un point fixe que l' on déterminera.

3) Soit S la similitude directe de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

a) Déterminer S (M).
b) Construire le point G image de F par S.
c) Montrer que F est le milieu du segment [KG].
d) En déduire que lorsque M varie, la droite (KF) passe par un point fixe P. Construire P.

Exercice 8 :

Soit ABCD un carré de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note I le symétrique de C par rapport a D,

J = A* I et (C) le cercle circonscrit au carré ABCD. On désigne par R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Soit f la similitude directe de centre C et telle que f(D) = A.

a) Préciser le rapport et l'angle de f.
b) Vérifier alors que f(O) = B.

2/ On note $g = t_{\overrightarrow{CD}} \circ f \circ R$.

a) préciser g (A) et g (J).
b) Montrer que g est une similitude directe dont-on précisera le rapport et l'angle.
c) Soit Ω le centre de g. Montrer que $\Omega \in$ (C)

3/ a) Caractériser $g \circ g$, en déduire que $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b) Trouver alors une construction géométrique de Ω.

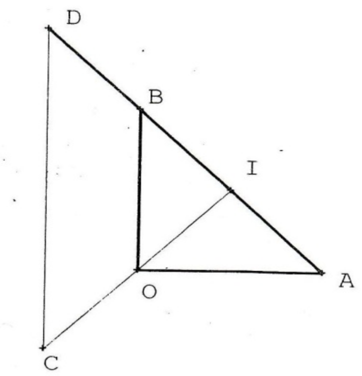
4/ Soit σ la similitude indirecte définie par $\sigma = g \circ S_{(AJ)}$ et K = S_J (D).

a) Déterminer $\sigma \circ \sigma$ (J), et montrer que $\sigma \circ \sigma$ est une homothétie dont-on précisera le rapport. Vérifier que K est le centre de $\sigma \circ \sigma$.
b) Déterminer alors les éléments caractéristiques de σ.

Exercice 9 (BAC 2008 prin)

. Le plane est orienté dans le sens direct.
Dans l 'annexe c ci-jointe (Figure2 page3), OAB est un triangle rectangle isocèle tel que

OA = OB et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$



On désigne par I le milieu du segment [AB] et par C et D les symétriques respectifs du point I par
Rapport à O et à B.
Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C .

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

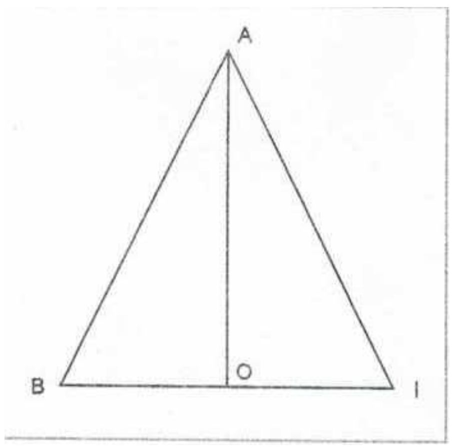
2) a) Montrer que O est l 'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur(AC).
Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la Similitude f.
3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D .
a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC) . En déduire g(O).
b) Déterminer les images de C et D par gof^{-1} . En déduire la nature de gof^{-1} .
4) Soit I'= f(I) et J'= g(J)
a) Déterminer les images des points J et I ' par gof^{-1}.
b) Montrer que les droites (I J), (I'J') et (CD) sont concourantes.

Exercice 10 (bac 2014 princ) :

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans l'annexe ci-jointe (**Figure** 1), IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI], OA=2OI et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$



Soit h l ‘homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Determiner h(O) et S(I).
2) Pour tout point M du plan , on note P son image par h et Q son image par s.
   Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit 0' = f(0). Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

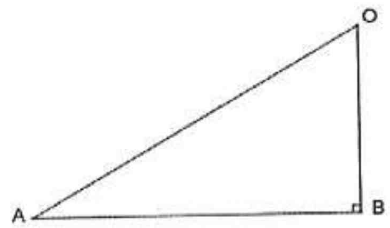
b) Soit I’=f(I) .Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I’.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.
a) Exprimer en fonction de z l'affixe Z_P du point P.
b) Exprimer en fonction de z l'affixe Z_Q du point Q.

c) Soit z' l'affixe du point M' = f (M). Montrer que z' = $\frac{3+i}{2}z - \frac{3}{4}$

Exercice 11(bac 2013 princ) :

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$



A) Soit f ta similitude directe de centre O qui envoie B en A.

1) Donner une mesure de l'angle de f et montrer que le rapport de f est 2.

2) Soit C l'image de A par f.
   a) Montrer que le triangle OCA est rectangle en A de sens direct et que AC =2AB.
   b) Placer le point C.

B) Soit g la similitude indirecte qui envoie B en A et A en C. On note Ω le centre de g.

1) a) Montrer que Ω vérifie la relation $\overrightarrow{\Omega C} = 4\overrightarrow{\Omega B}$.
   b) Placer le point Ω.

2) Soit G le barycentre des points pondérés (A, 1) et (B, 2) et H son image par g.
   a) Vérifier que $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et en déduire que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
   b) Montrer que $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$;puis montrer que G est le milieu du segment [Ω H].
   c) Montrer que la droite (GH) est l'axe de g.

Exercice 12 (bac 2015 princ)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.
2) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.
a) Déterminer le rapport de g.
b) Déterminer l'axe Δ de g.
c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que g(B)=D et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe.
b) on pose D'=f(D) . Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J.
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .Déterminer f(I).

Exercice 13 (bac 2014 ctr)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans l'annexe ci-jointe (**Figure** 1), IAB est un triangle isocèle en A , O est le milieu de [BI], OA=2OI et $\left(\widehat{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .Soit h l'homothétie de centre I et de rapport 2 et s la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) Determiner h(O) et S(I).
2) Pour tout point M du plan , on note P son image par h et Q son image par s.

Soit f l'application qui à un point M du plan associe le point M' barycentre des points pondérés (P, 3) et (Q, 1).

a) Soit 0' = f(0). Montrer que $\overrightarrow{OO'} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB}$ et construire le point O'.

b) Soit I'=f(I) .Montrer que $\overrightarrow{II'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{IA}$ et construire le point I'.

3) Dans cette question, on munit le plan du repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$, où J est le milieu de [OA] et on note z l'affixe d'un point M du plan.

a) Exprimer en fonction de z l'affixe Z_P du point P.
b) Exprimer en fonction de z l'affixe Z_Q du point Q.
c) Soit z' l'affixe du point M' = f (M). Montrer que z' = $\frac{3+i}{2}z-\frac{3}{4}$
d) Déterminer l'image par f du cercle de diamètre [OI].

Exercice 14 :

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB};\widehat{\ }\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(2\pi)$.

On note D le symétrique de A par rapport à C.
On désigne par S la similitude directe transformant D en C et C en B.
1) Déterminer le rapport et l'angle de S.
2) On appelle Ω le centre de S. Montrer que $DC^2=\Omega D^2$ et en déduire la nature du triangle ΩDC.
3) On pose $\sigma=SoS$
a) Quelle est la nature de la transformation σ .Préciser ses éléments caractéristiques
b) Déterminer l'image du point D par la transformation σ
c) Montrer que le quadrilatère $AD\Omega B$ est un rectangle
4) Dans cette question le plan complexe rapporte à un repère orthonormé direct $\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$, choisi de manière à ce que les points A , B , C et D aient pour affixes respectives 0 , 1 , i et 2i
a) Montrer que l'écriture complexe de la similitude S est : $z'=(1+i)z+2-i$ ou z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par S
b) Posons $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ (x , y ,x' et y' etant des réels).Vérifier que : $\begin{cases}x'=x-y+2\\y'=x+y-1\end{cases}$
c) Soit J le point d'affixe 1+3i
Existe -t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AJ}=0$ ou M' désigne l'image de M par S

Exercice 15 (bac 2015 princ)

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

4) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.
5) Soit g la similitude indirecte de centre A qui envoie C sur B.
a) Déterminer le rapport de g.
b) Déterminer l'axe Δ de g.
c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que g(B)=D et en déduire que $[BD)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ABC}$.

3) a) Montrer que fog est une symétrie axiale et préciser son axe.
b) on pose D'=f(D) . Montrer que D' est le symétrique de B par rapport à A.

4) La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAD'}$ coupe la droite (CD') en un point J.
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC .Déterminer f(I).

Suites

Exercice 1 :

1) Soit f la fonction définie sur $[1,2]$ par f(x)=x+$\frac{1}{4}\left(2-x^2\right)$

a- Montrer que pour tout x$\in[1,2]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

b- Montrer que pour tout x$\in[1,2]$, $\left|f(x)-\sqrt{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left|x-\sqrt{2}\right|$

2) Soit U la suite réelle définie par $\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=U_n+\frac{1}{4}\left(2-U_n{}^2\right)\text{ pour tout } n\in \text{IN}\end{cases}$

a- montrer par récurrence que pour tout n $\in$ IN ; $1\leq U_n\leq 2$

b-Montrer que pour tout n de IN ; $\left|U_{n+1}-\sqrt{2}\right|\leq\frac{1}{2}\left|U_n-\sqrt{2}\right|$

c-En déduire que pour tout n $\in$ IN ; $\left|U_n-\sqrt{2}\right|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$.Conclure

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k}{e^k}=-\frac{1}{e}+\frac{2}{e^2}-\frac{3}{e^3}+............+(-1)^n\frac{n}{e^n}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a , (2n+2)-e(2n+1)<0.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $u_{2n+2}-u_{2n}=\frac{1}{e^{2n+2}}\left[(2n+2)-e(2n+1)\right]$

en déduire que la suite $\left(u_{2n}\right)_{n\geq1}$ est décroissante.

2) Montrer que la suite $\left(u_{2n+1}\right)_{n\geq1}$ est croissante .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $u_{2n}>u_{2n+1}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n+1})$

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel α et que $u_3<\alpha<u_2$

Exercice 3: On considère les suites réelles définies sur IN par

$$\begin{cases}U_0=0\text{ et }U_{n+1}=\dfrac{2U_n+V_n}{3}\\ V_0=1\text{ et }V_{n+1}=\dfrac{3U_n+2V_n}{5}\end{cases}$$

1) Montrer que pour tout n $\in\mathbb{N}$; on a $U_n\leq V_n$.
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.
3) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et admettent la même limite.
4) Soit la suite (W_n) définie sur IN par $W_n=9U_n+5V_n$.
   a) Montrer que (W_n) est une suite constante .
   b) En déduire la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 4 : On considère l'équation différentielle (E) : y'=2y-4y^2.

1) On pose z=$\frac{1}{y}$.

Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de l'équation différentielle (E ') : z'=4-2z

a) Résoudre l'équation différentielle E'.

b) Déterminer la solution de f de E tel que f(0)=$\frac{1}{3}$

2) On désigne par (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
   a) Vérifier que pour tout réel x >0 , $4f^2(x)= 2f(x)-f'(x)$.
   b) Calculer $\int_0^{\ln 2} f(x)dx$.
   c) Déduire le volume V du solide engendré par la rotation , autour de l'axe des abscisses , du domaine A du plan compris entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=ln2.

Exercice 5

On définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ l`intégrale $I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\, dx$

1 / Calculer I_1

2 / Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1)$

3 /A l`aide d`une intégration par parties montrer que pour tout entier n≥1

$$I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4 / Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$; $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ...+ \frac{2^n}{n!} + I_n$

5 / On pose pour tout entier $n \geq 1$ $U_n = \frac{2^n}{n!}$

a / Calculer $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ et montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3;\ U_{n+1} \leq \frac{1}{2}U_n$

b / En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 3;\ 0 \leq U_n \leq U_3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

c / En déduire la limite de la suite $\left(U_n\right)$ puis celle de $\left(I_n\right)$

d / justifier que $e^2 = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty}\left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ...+ \frac{2^n}{n!}\right)$

Exercice 6

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit h la fonction numérique à variable réelle définie sur]1 , +∞[par : $h(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1°) Montrer que l'on a : $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}\int_{n-1}^{n+1}\frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n-1}$.

2°) Démontrer l'égalité : $\int_{n-1}^{n+1}\frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$. En déduire que : $0 \leq h(n) \leq \frac{2}{n^2-1}$

3°) a) Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel élément de IR- {-1, 1} on a : $\frac{2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.

b) On pose : $S_n = \frac{2}{n^2-1} + \frac{2}{(n+1)^2-1} + ... + \frac{2}{(2n)^2-1}$. Simplifier l'expression de S_n

c) Montrer que la suite $\left(S_n\right)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

4°)a) Déduire des résultats précédents que : $0 \leq h(n) + h(n+1) + ... + h(2n) \leq S_n$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\left(h(n) + h(n+1) + ... + h(2n)\right)$.

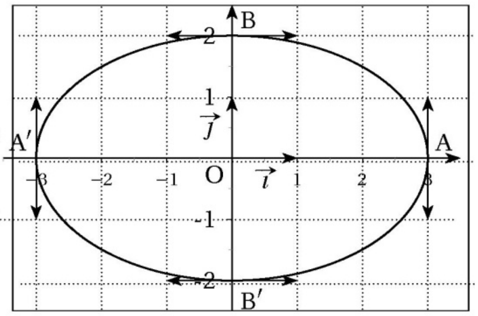
5°) Pour n ≥ 2, on pose, $u_n = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{2n-1}$

a) Vérifier que : $h(n) + h(n+1) + ... + h(2n) = u_n - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2(2n+1)}{n-1}\right)$

b) En déduire que la suite (U_n) admet une limite finie que l'on précisera.

Coniques

Exercice 1: Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.



2. La courbe dessinée ci-contre admet pour équation :

a) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ b) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ c) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

3. Un des foyers de l'ellipse est le point F de coordonnées :

a) $F(0,\sqrt{13})$ b) $F(\sqrt{13},0)$ c) $F(\sqrt{5},0)$

4. Une des directrices de l'ellipse est la droite D d'équation :

a) $x=\frac{4}{\sqrt{13}}$ b) $y=\frac{4}{9}$ c) $x=\frac{9}{\sqrt{5}}$

5. La parabole d'équation $y^2=-4x$ a pour foyer F de coordonnées :

a) $(2,0)$ **b)** $(0,1)$ **c)** $(-1,0)$

6. et a pour paramètre p égal à

a) -2 **b)** 2 **c)** 4

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points A(1,0) et B(-1 , $\sqrt{3}$) ,B'(-1 , $\sqrt{3}$) et A' (-1 , 0) . Soit (E) l'ellipse de centre A' et de sommets B , B' et passant par A .

1. Montrer que A est un sommet de (E).
2. Déterminer les foyers F et F' , l'excentricité **e** et les directrices associées (D) et (D') de (E).
3. Démontrer que (E) à pour équation cartésienne : $\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$
4. Déterminer les points M_1 et M_2 d'intersection de (E) et l'axe des ordonnées. Tracer (E).
5. a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (E) en M_1 d'ordonnée positive.
   b) Soit H et H' les projetés orthogonaux respectivement des foyers F et F' sur (T). Montrer que FH. F'H'= 3

Exercice 3 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère la courbe (C) d'équation : $x^2 \square y^2 \square x \square 2 \square 0$.

1. a) Prouver que (C) est une hyperbole dont on déterminera le centre, les sommets et les foyers.
   b) Tracer (C) et ses asymptotes.
2. Soit E le point de (C) d'abscisse 3 et d'ordonnée positive.
   a) Ecrire une équation de la tangente (T) en E à (C).
   b) La droite (T) coupe les asymptotes de (C) en G et H. Prouver que E est le milieu de [GH].
3. Calculer le volume, en unité de volume, engendré par la rotation de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ de la courbe (C) autour de l'axe des abscisses où A est un sommet de (C).

Exercice N°4 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère la courbe (H) d'équation $3x^2 - y^2 - 12 = 0$.

1) a. Montrer que (H) est une hyperbole ;
 b. Préciser le foyer F d'abscisse positif et la directrice associée D.

2) Soit M_0 (x_0 , y_0) un point de (H) non situé sur l'axe focal de (H).
 a. Déterminer une équation de la tangente (T) à (H) en Mo .
 b. Soit Q le point d'intersection de (T) et D.
 Montrer que $\overrightarrow{FM_0}.\overrightarrow{FQ}=0$.

3) a. Vérifier que le point B(4 , 6) appartient à (H).
 b. A l'aide de la question 2) b. construire à la règle et au compas la tangente à (H) en B.
 c. Construire (H) .

Exercice 5:

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère l'hyperbole (H) d'équation : $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ et on désigne par *M* le point de coordonnées

$\left(\frac{1}{2\cos\theta},2\tan\theta\right)$ où θ un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1. (a) Déterminer, par leurs coordonnées les sommets et les foyers de (H).
 (b) Donner les équations cartésiennes des deux asymptotes (Δ_1) et (Δ_2).
 (c) Tracer (H) et placer ses foyers.
 (d) Vérifier que le point *M* appartient à (H).
2. Soit (TM) la tangente à (H) en M.
 Montrer qu'une équation de (TM) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est : $2x - y\sin\theta - 2\cos\theta = 0$.
3. On désigne respectivement par P1 et P2 les points d'intersections de (TM) avec les droites (Δ_1) et (Δ_2).
 a) Donner les coordonnées des points P1 et P2.
 b) Montrer que l'aire du triangle OP_1P_2 est indépendante de θ.

Exercice n° : 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On considère l'ellipse (E) d'équation: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ et on désigne par I le point de coordonnées

($3\sin\theta$, $2\cos\theta$); où θ est un réel de $]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) a) Déterminer l'excentricité, les foyers, les sommets et les directrices de (E).
 b) Tracer (E); en précisera en particulier les tangentes aux sommets.
 c) Vérifier que le point I appartient à (E).

2) On désigne par (T) la tangente à (E) au point I. Vérifier que (T) a pour équation: $2\sin\theta\, x + 3\cos\theta\, y - 6 = 0$.

3) On désigne par P et Q les points d'intersection de (T) respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On désigne par A l'aire du triangle OPQ.
 a) Déterminer les coordonnées de P et Q.
 b) Montrer que $A = \frac{6}{\sin 2\theta}$.
 c) En déduire que l'aire A est minimale si et seulement si I est le milieu du segment [PQ].

Exercice 7 :

Le plan est mu ni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Soit (E) l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

Déterminer les cordonnées des foyers de l'ellipse *(E)* et donner son excentricité.

b) Soit *(P)* la parabole d'équation $y^2 = 2x + 4$.

Déterminer les coordonnées du foyer F de la parabole *(P)* et donner une équation de sa directrice.

2) Dans l'annexe ci-jointe **(Figure 2)**, on a tracé dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ l'ellipse (E) et la parabole (P) .

Soit (Γ) la courbe d'équation : $y^2 = -2|x| + 4$.

a) Vérifier que $\left(O,\vec{j}\right)$ est un axe de symétrie de (Γ).

b) Tracer (Γ) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) a) Soit C le cercle d'équation $x^2+y^2 = 4$.

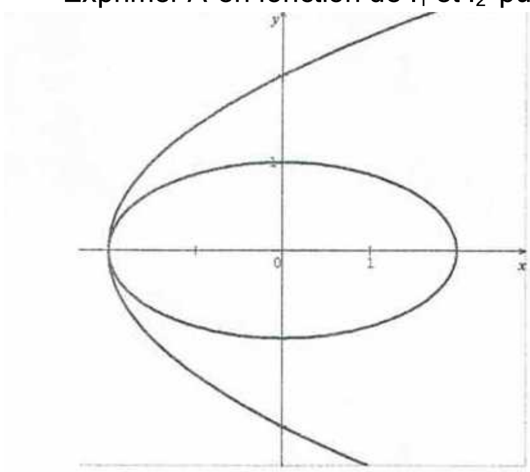
Vérifier que pour tout réel t de [0,2], le point $M\left(t,\sqrt{4-t^2}\right)$ appartient à C.

b) On pose $I_1=\int_0^2\sqrt{4-t^2}\,dt$. Montrer que $I_1=\pi$

4) Calculer $I_2=\int_0^2\sqrt{-2t+4}\,dt$.

5) Soit *A* 'aire de la surface limitée par la courbe (Γ) et l'ellipse *(E).*

Exprimer A en fonction de I_1 et I_2 puis calculer A .



ln et exp

Exercice 1 : choisir la réponse correcte

1) Soit I=$\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x}dx$, alors I est égale à : 3 b) $\frac{1}{4}$ c) -$\frac{1}{4}$
2) Soit I = $\lim_{x\to 1^-}\left[\ln(1-x)+\frac{1}{1-x}\right]$, alors a) I = 1 b) I = 0 c) I = + ∞
3) La limite de (x+1+e^{-x}) quand x tend vers $-\infty$ est égale à : $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$
4) Soit f la fonction définie sir IR par f(x)=e^{2x}-1 , alors f est une solution de l'équation différentielle :
a) 2y' = y+2 b) y'=2y+2 c) y'=-2y-2

Exercice 2(bac 2008 ctr) :

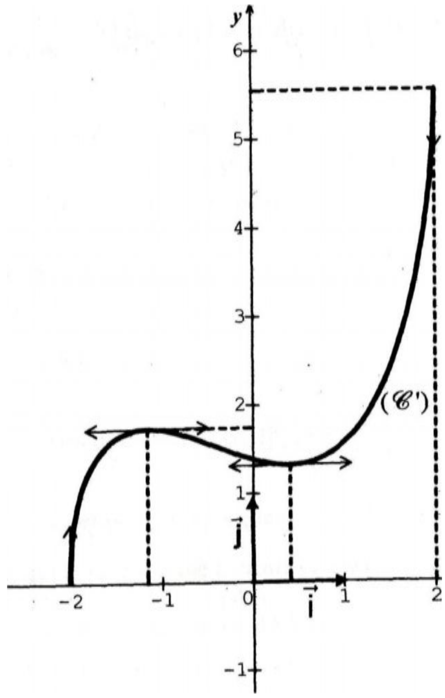
1) soit f la fonction définie sur $[-2,2]$ par $\begin{cases} f(x)=(x+2)\ln(x+2) & \text{si } x\neq -2 \\ f(-2)=0 \end{cases}$

et C sa courbe représentative dans un repère orthonormé$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

a) Montrer que f est continue à droite en (-2).
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en (-2).
c) Donner le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[-2,2]$ par g(x)=f(x)-$x\sqrt{4-x^2}$ et C' sa courbe représentative dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

a) Déterminer la position relative des courbes C et C'.
b) Ci dessous, on a tracé la courbe C' de g. Tracer la courbe C dans le même repère .

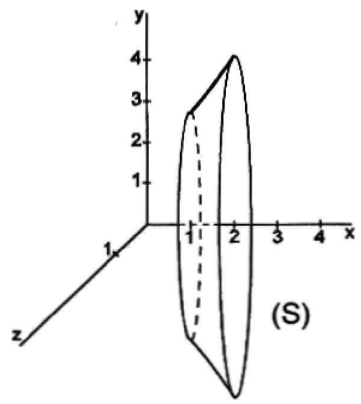


3) Soit α un réel non nul de $[-2,2]$. On désigne par A_α l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C'et les droites d'équations respectives x=0 et x=α

a) Montrer que $A_\alpha=\int_0^\alpha x\sqrt{4-x^2}$.(On distinguera les deux cas $\alpha>0$ et $\alpha<0$).
b) Calculer A_α .
c) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes C et C'.

Exercice 3 :

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation y= $e^{\sqrt{x}}$, x$\in[1,2]$ autour de l'axe(Ox)
.



Le but de cette exercice est de calculer le volume V de cette solide.

Soit F la fonction définie sur$[1,+\infty[$ par F(x) = $\int_1^x e^{\sqrt{4t}}dt$.

Vérifier que *V* = π F(2).

2) Soit G la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par G(x) = $\int_1^{\sqrt{4x}} te^t dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que G'(x) = 2 F'(x).
b) En déduire que pour tout réel x de$[1,+\infty[$, 2 F(x) = G(x) - G{1).

3) a) Montrer que pour tout réel x de $[1,+\infty[$, G(x)=$\left(\sqrt{4x}-1\right)e^{\sqrt{4x}}$

b) Calculer alors *V.*

Exercice 4 :

1/ Soit g la fonction définie par : $g(x)= \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

a) Etudier les variation de g.

b) Montrer que $I(0;\frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de Cg.

c) Tracer C_g et la tangente T à la courbe C_g en I.

d) Déterminer A l'aire de la partie du plan limitée par C_g ; l'axe des abscisses et les droites d'équations : x=0 et x=1.

2/ a) Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : $y' + y = (g(x))^2$

b) En déduire le volume V du solide de révolution engendrée par la rotation de l'arc $\widehat{AB}$ de la courbe C_g autour de $(O,\vec{i})$ où A et B les points de C_g d'abscisses respectifs 0 et 1.

3/ Pour tout $n\in IN$, on pose $U_n=\int_0^1 \dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$

a) Montrer que la suite U est décroissante. En déduire que U est convergente.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$ on a: $U_n+U_{n+1}= \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

c) En déduire que pour tout $n\in IN^*$; on a : $\dfrac{1-e^{-n}}{2n} \le U_n \le \dfrac{1-e^{-n}}{n}$

d) Déterminer alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4/ Pour tout $n\in IN^*$ et $x \in IR$, on pose $S_n= \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{-kx}$ et $V_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left((-1)^k\int_0^1 e^{-kx}dx\right)$

a) Exprimer S_n en fonction de n et x.

b) Montrer que $V_n=1-A+(-1)^{n+1}U_n$.

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k}{k}\left(1-e^{-k}\right)$

Exercice 5 (bac 2012 princ)

I] On considère la fonction f_2 définie sur $]0,+\infty[$ par $f_2(x) = x^2 - \ln x$ et on désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f_2(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_2(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Dresser le tableau de variation de f_2.

2) Dans l'annexe ci-jointe on a tracé, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (L) de la fonction ln et la courbe (C) : $y = x^2$.

a) Soit x > 0. On considère les points M et M_2 de même abscisse x et appartenant respectivement à (L) et (C). Vérifier que $MM_2 = f_2(x)$.

b) Construire alors dans l'annexe les points de la courbe (Γ) d'abscisses respectives 2 ; $\dfrac{1}{e}$ et $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) Tracer la courbe (Γ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de l'annexe.

II] 1) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_k définie sur $]0,+\infty[$ par $f_k(x) = x^k - \ln x$.

a) Déterminer f'_k la fonction dérivée de f_k.

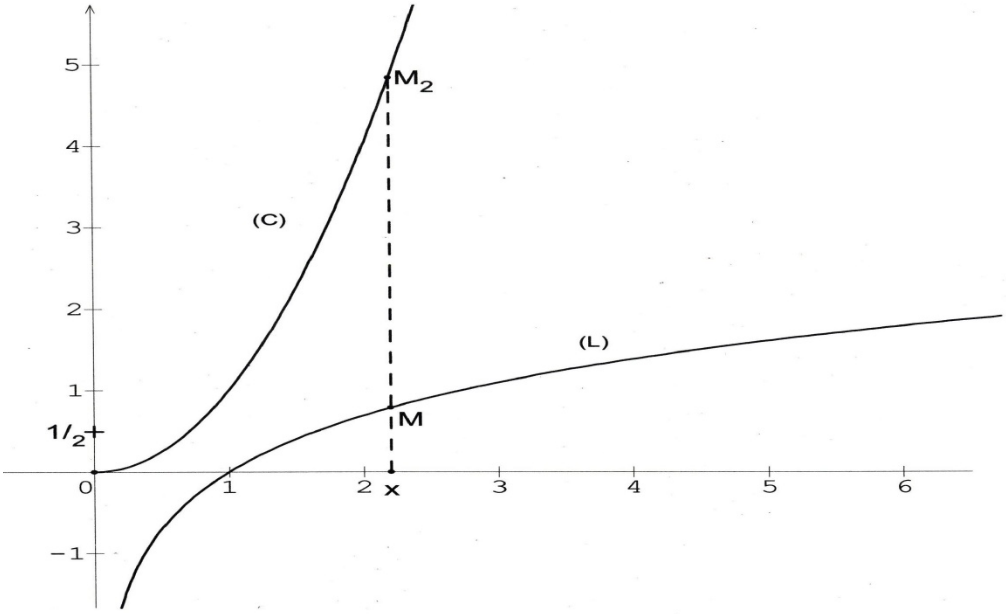
b) Montrer que f_k admet un minimum en $\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$ égal à $\frac{1+\ln k}{k}$

c) Pour tout réel $x > 0$, on considère les points $M_k(x,x^k)$ et $M(x,\ln x)$.
Déterminer la valeur minimale de la distance MM_k.

2) Pour tout entier $k \geq 2$, on pose $u_k=\sqrt[k]{\frac{1}{k}}$.

a) Vérifier que $\ln u_k = -\frac{\ln k}{k}$ et en déduire la limite de (u_k).

b) Soit $A(1, 0)$ et A_k le point de coordonnées $(u_k, f_k(u_k))$.Calculer la limite de la distance AA_k lorsque k tend vers $+\infty$.



Exercice 6 :

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x)=e^{f(x)} & \text{si } x>0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

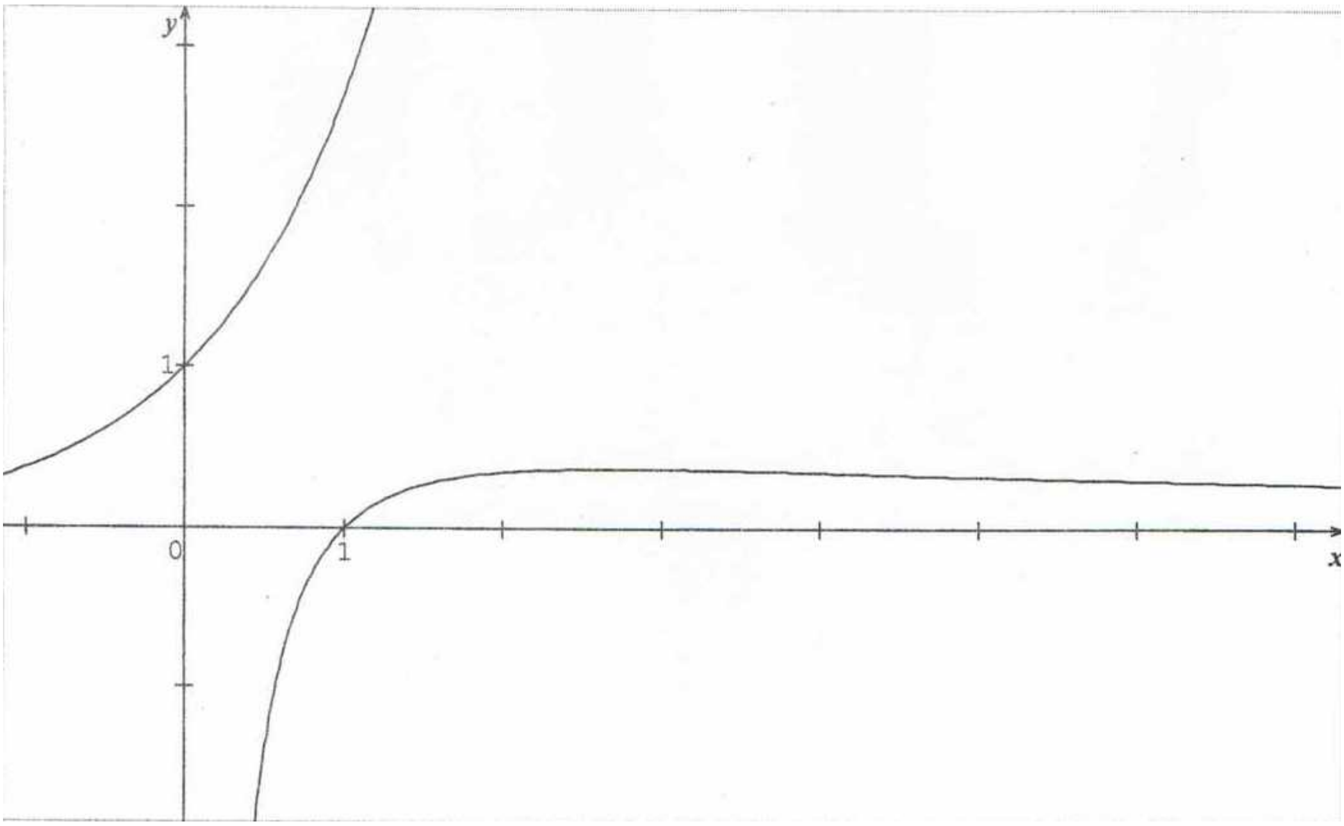
a) Montrer que g est continue à droite en 0.
b) Montrer que g est dérivable à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de g.

3) Dans la **Figure ci-dessous ,** on a représenté dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ .La courbe de la fonction f et la courbe de la fonction exponentielle.

a) Construire le point A de coordonnées $(e,g(e))$.
b) Déterminer et tracer la tangente à la courbe C_g de g au point d'abscisse 1
c) Tracer la courbe C_g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

3) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} U_1=1 \\ U_{n+1}=g(U_n) & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$

a) Donner la limite de (u_n)
b) Déterminer l'entier naturel n pour lequel $\sqrt[n]{n}$ est maximal.



Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ par f(x)=ln(1+tanx) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto\left(-\frac{\pi}{4}\right)^+} f(x)=-\infty$.

b)Calculer f '(x) pour $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Vérifier que les points O, $A\left(\frac{\pi}{4},\ln 2\right)$ et $I\left(\frac{\pi}{8},\frac{\ln 2}{2}\right)$ sont des points de (C) .

(On donne $\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$)

b) Montrer que $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\ln 2-f(x)$ pour tout $x\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$.(on rappelle que $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

a) Justifier alors que le point I est un centre de symétrie de la courbe(C).

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé les points I et A dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3) Tracer la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ en précisant sa tangente au point O.

4) On désigne par S_1 la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OA) et les droites d'équations x = 0 et x = $\frac{\pi}{8}$ et on désigne par S_2 la partie du plan limitée par la courbe (C),

la droite (OA) et les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{8}$ et $x = \dfrac{\pi}{4}$.

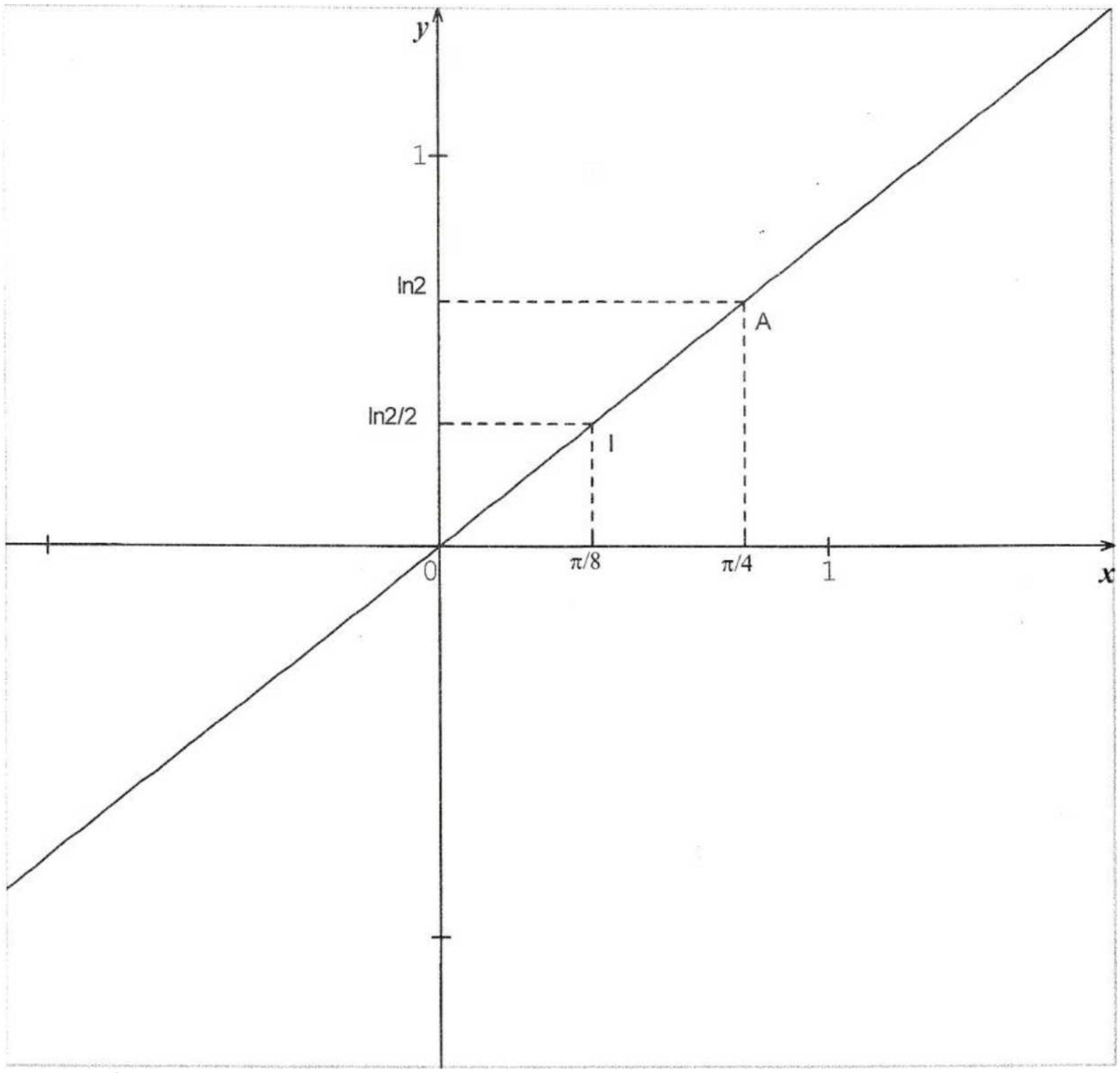
a) Justifier que les surfaces S_1 et S_2 ont la même aire.

b) Calculer alors $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1 + \tan x)dx$.

5) a) Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b)Justifier que f^{-1} est dérivable sur J et donner l'expression de $(f^{-1})'(x)$pour x appartenant à J.

c) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+\left(e^x-1\right)^2}dx$



Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1) Montrer que pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}$.

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}$ [f(x) - x], puis interpréter graphiquement le résultat trouvé.

3) Dresser le tableau de variation de f.

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O.

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C).

c) Tracer dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ la droite Δ et la courbe (C).

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par G(x)= $\displaystyle\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa fonction dérivée.

b) En déduire que pour tout x appartenant $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; G(x)=x

c) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$.

2) On désigne par *A* l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C),la droite Δ et les droites d'équations x= 0 et x= 1.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \ln 2 - 2\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$

b) En déduire la valeur de *A*..

<u>Exercice 9 (bac 2010) :</u>

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par f(x) = $\dfrac{(x-2)e^x}{x^3}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) a) Montrer que f'(x)=$\dfrac{e^x\left(x^2-4x+6\right)}{x^4}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la tangente Δ à C_f au point d'abscisse 2 a pour équation y =$\dfrac{e^2}{8}(x-2)$.

3) On se propose d'étudier la position relative de C_f et de sa tangente Δ.

Soit **g** la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par g(x) =$\dfrac{e^x}{x^3}$

On donne ci-dessous le tableau de variation de g.

x	0		2		3		$+\infty$
g(x)	‖ $+\infty$	↘	$\dfrac{e^2}{8}$	↘	$\dfrac{e^3}{27}$	↗	$+\infty$

a) Montrer que l'équation g(x) = $\dfrac{e^2}{8}$ admet dans $]3,+\infty[$ une solution unique α telle que 4,2 < α <4,3.

b) Déduire la position relative de C_f et Δ.

4) Justifier l'existence sur $]0,+\infty[$ d'une primitive F de f telle que F(1) = e.

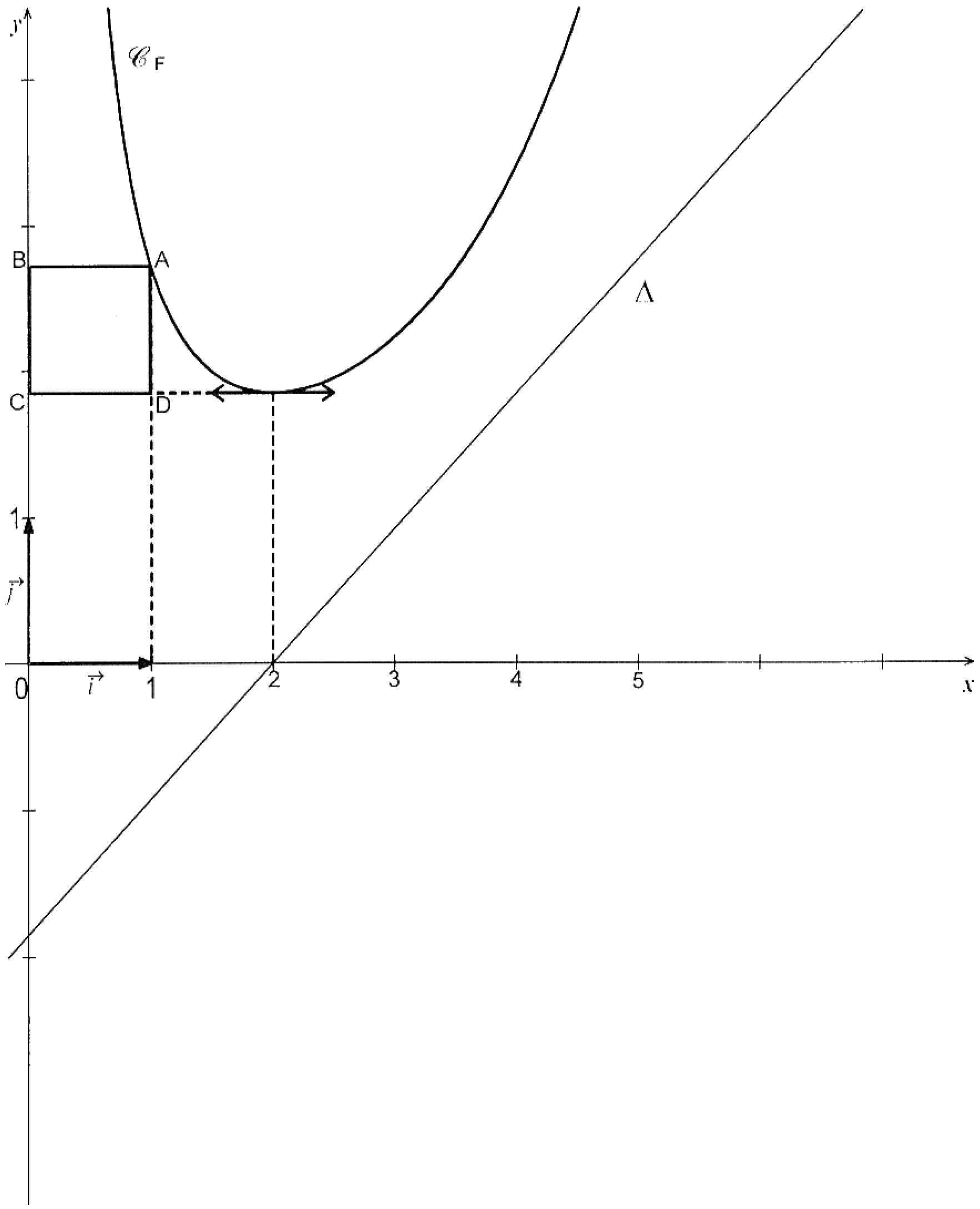
5) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe représentative C_F de la fonction F, la droite Δ et le rectangle ABCD tel que A(1, e) ; B(0, e) ; C(0, F(2)) et D (1, F(2)).

a) Etudier les branches infinies de C_f.

b) Tracer la courbe C_f dans l'annexe ci-jointe.

6) Soit t $\in$ [1, 2[. On désigne par S(t) la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe $\left(O,\vec{i}\right)$ et les droites d'équations x = t et x = 2. On désigne par ,A(t) l'aire de S(t).

a) Exprimer A(t) en fonction de F(t).
b) Hachurer S(1) et justifier qu'elle a la même aire que le rectangle ABCD.
c) Montrer qu'il existe un unique $t_0 \in [1, 2[$ tel que $A(t_0)=\frac{1}{2}A(1)$
d) Construire le point de C_f d'abscisse t_0.



Exercice 9 (bac 201 cntr)

1) Soit la fonction f définie sur]0,+∞ [par f(x) = lnx - xlnx + x.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que pour tout x > 0, f '(x) = $\frac{1}{x} - \ln x$

2) Dans la figure (2) de l'annexe ci-jointe, C_g et C_h sont les courbes représentatives dans

un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ des fonctions g et h définies sur]0, +∞[par g(x) = $\frac{1}{x}$

et h(x) = ln x .

C_g et C_h se coupent en un point d'abscisse β .

a) Par une lecture graphique donner le signe de f '(x).

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $f(B) = \beta + \frac{1}{\beta} - 1$.

3) On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Etudier la position relative des courbes , C_f et C_h

b) Montrer que la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisses respectives x_1 et x_2 telles que $0{,}4 < x_1 < 0{,}5$ et $3{,}8 < x_2 < 3{,}9$.

c) Placer dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les points A (β , 0) et B(0, $\frac{1}{\beta}$) et en déduire une

construction du point de coordonnées (β , f($\frac{1}{\beta}$)).

d) Tracer C_f.

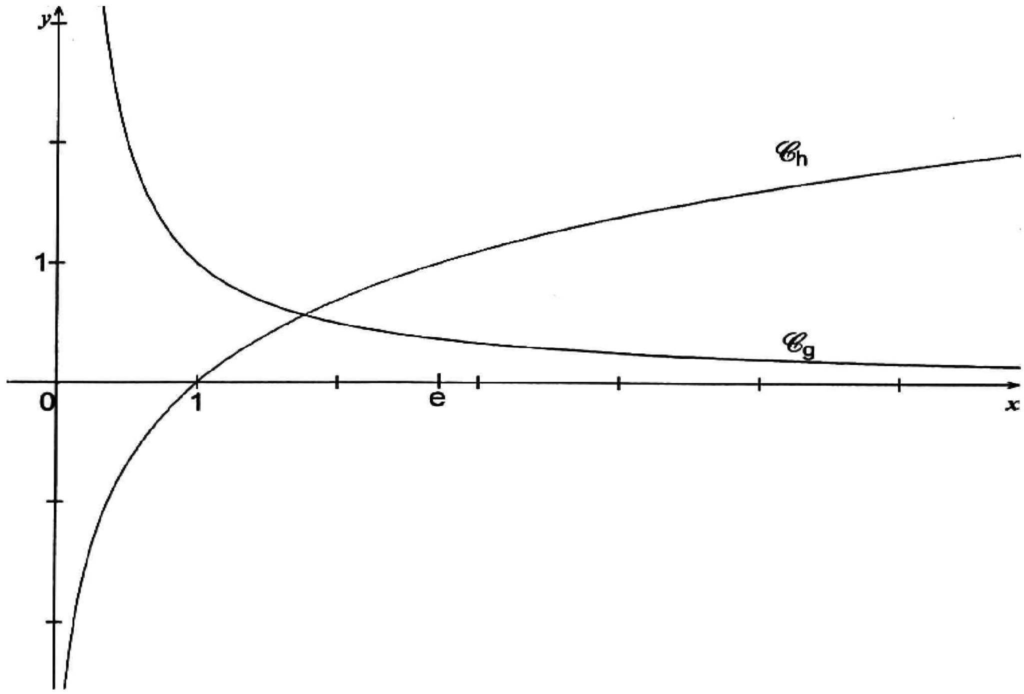
4) Pour tout réel t de $]0,+\infty[\setminus\{B\}$ on désigne par A (t) l'aire de la partie du plan S(t) limitée

par les courbes C_g et C_h et la droite d'équation x = t.

a) Montrer que pour tout réel t $t\in]0,+\infty[\setminus\{\beta\}$; A(t) = f(β)-f(t).

b) Soit $t_0 > \beta$. Hachurer S(to).

c) Montrer qu'il existe un réel unique t_1 dans]0 , β [tel que A (t_1) = A (t_0). Hachurer S(t_1).



Exercice 10:

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : f(x)= $\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
.

I) 1/ Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$ et tracer la courbe C_f.

2/ a- Calculer $A(\alpha)=\int_{\alpha}^{1} f(x)dx$ où $0<\alpha<1$.Interpréter graphiquement cette valeur.

b- Calculer $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} A(\alpha)$

II) 1) a- Justifier que pour tout $n\in IN^*$, on a : $\frac{1}{n+1}\le\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\le\frac{1}{n}$.

b- Vérifier que $\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\frac{1}{n}-f(n)$.

c- En déduire que pour tout $n\in IN^*$; $0\le f(n)\le\frac{1}{n(n+1)}$.

2) On considère la suite (S_n) définie sur IN^* par

$$S_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots\dots\dots\dots+\frac{1}{2n(2n+1)}$$

a- Montrer que pour tout $n\in IN^*$; $0\le\sum_{k=n}^{2n}f(k)\le S_n$

b- Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x\in IR\setminus\{0,-1\}$, on a :

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}$$

c- En déduire que $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d- Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n} f(k)$

3) On considère la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$.

Vérifier que pour tout $n \in IN^*$; $\sum\limits_{k=n}^{2n} f(k) = U_n - \ln(2 + \frac{1}{n})$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 11 : (bac 2013)

I. Soit la fonction φ définie sur IR* par $\varphi(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ et soit C_φ sa courbe représentative dans
repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \varphi(x)$. Interpréter graphiquement les résultats trouvés.

c) Montrer que φ est strictement décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.

2) Montrer que l'équation $\varphi(x) = x$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty,0[$ et une solution unique β dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

II. On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = e^x - x$ et la fonction g définie sur $]0,+\infty[$
par $g(x)=1-x+\ln x$.

On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes communes aux deux courbes C_f et C_g.

Dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2),** on a tracé dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes C_φ, C_f et C_g des fonctions φ, f et g et la droite d'équation y = x.

1) Soit a un réel et b un réel strictement positif.
On désigne par Δ_a la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et par D_b, la tangente
à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

a) Donner une équation de Δ_a et une équation de D_b.

b) Montrer que : (A_a et D_b sont parallèles) si et seulement si ($b = e^{-a}$).

Dans la suite on suppose que Δ_a ,et D_b, sont parallèles ,c'est-à-dire $b = e^{-a}$.

2) a) Montrer que : (Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si (a $\neq$ 0 et a = $\frac{e^a}{e^a - 1}$

b) En déduire que Δ_α est tangente à la courbe C_f et à la courbe C_g respectivement aux

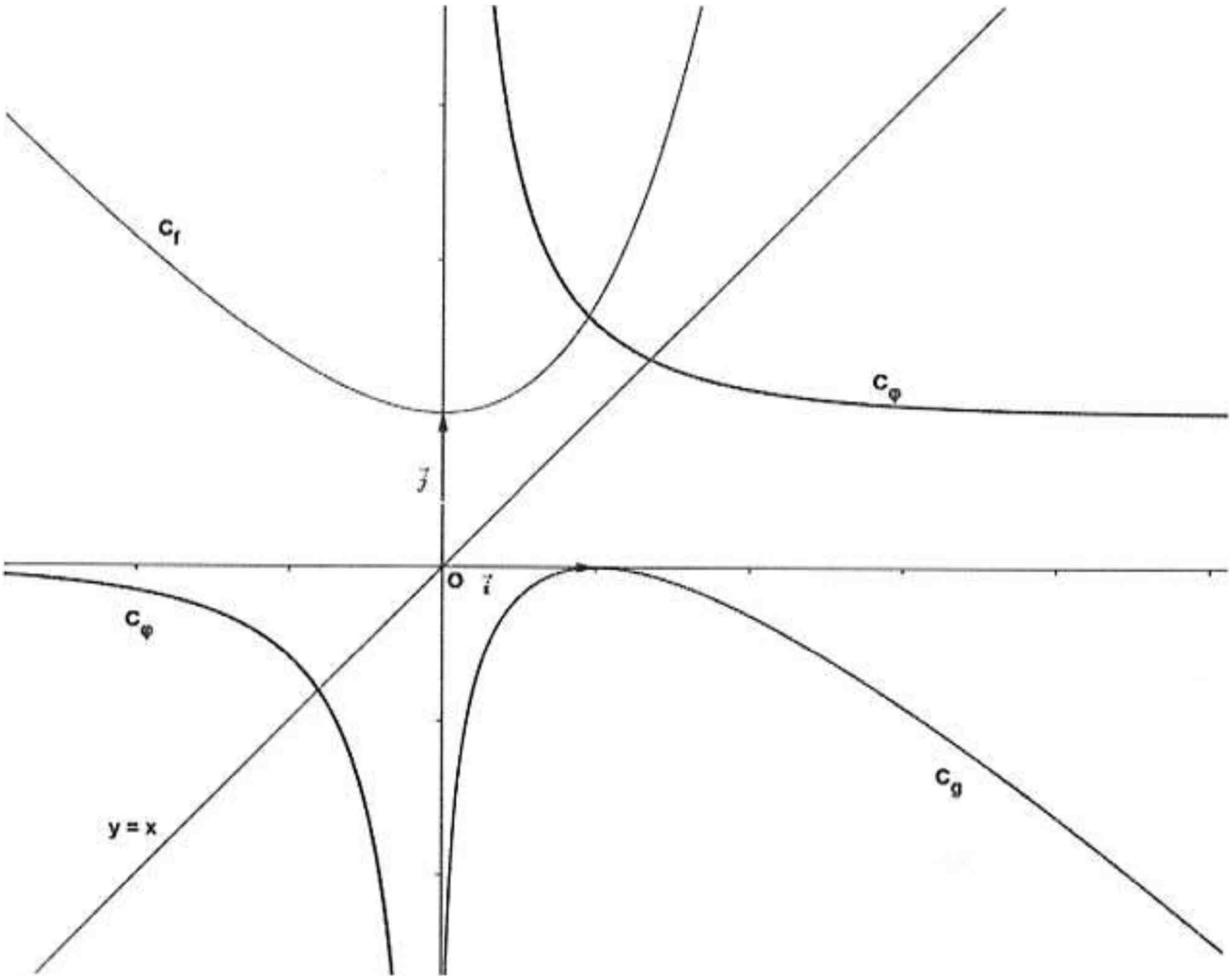
points $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.(α étant la valeur définie dans la question 1. 2))

c) Montrer que C_f et C_g admettent une deuxième tangente commune que l'on précisera.

3) a) Construire dans l'annexe ci- jointe **(Figure 2),** le point $A(\alpha, f(\alpha))$.

b) Vérifier que $e^{-\alpha} = f(-\alpha) - \alpha$ puis construire $B(e^{-\alpha}, g(e^{-\alpha}))$.

c) Tracer Δ_α.



EXERCICE 16 (bac tunisien)

Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 3, on désigne par f_p la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f_p(x) = p(\ln x) - x$, où ln désigne la fonction logarithme népérien. On note (C_p) la courbe représentative de f_p dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A-I) Etudier les variations de la fonction f_3 : $x \mapsto 3\ln x - x$

2) Montrer que l'équation $f_3(x) = 0$ admet exactement deux solutions, notées U_3 et V_3, appartenant respectivement aux intervalles]1, 3[et $]3,+\infty[$.

3) On donne ci-dessous, le tableau de variation de f_p pour $p > 3$.

x	0		p		$+\infty$
$F_p'(x)$		$+$	0	$-$	
f_p	$-\infty$	$\nearrow$	$p\ln p - p$	$\searrow$	$-\infty$

a) Montrer que , pour tout entier naturel $p > 3$, il existe un unique réel u_p appartenant à l'intervalle]l,p[telque $f_p(u_p) = 0$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel $p > 3$, il existe un unique réel $v_p > p$ tel que $f_p(v_p) = 0$.

On définit ainsi, pour tout entier naturel $p > 3$, deux suites (u_p) et (v_p).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier les deux suites (u_p) et (v_p) définies précédemment.

1) Déterminer la limite de la suite (v_p).

2) On a représenté dans la figure 1 de l'annexe ci jointe les courbes C_3, C4, C_5 et C_6 représentatives des fonctions f_3, f_4 , f_5 et f_6.

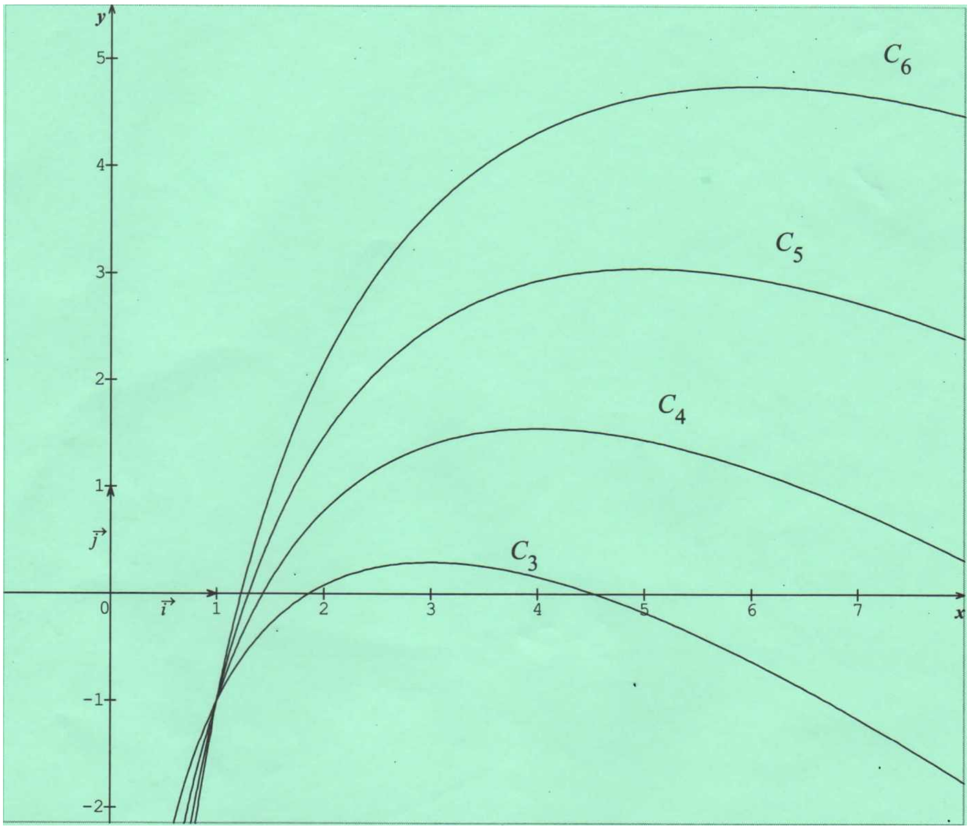
a) Placer sur l'axe des abscisses les termes U_3 , U_4 , U_5 et U_6 de la suite (u_p).

b) Représenter sur l'axe des ordonnées les réels $F_3(u_4)$, $f_4(u_5)$ et $f_5(u_6)$.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel $p > 3$, $f_p(u_{p+1}) < 0$.

b) En déduire que la suite (u_p) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\dfrac{\ln(U_p)}{U_p} = \dfrac{1}{p}$. En déduire la limite de la suite (u_p).


y
5
4
3
2
1
$\vec{j}$
0
$\vec{i}$
1
2
3
4
5
6
7
x
-1
-2
C_6
C_5
C_4
C_3

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : choisir la réponse correcte

SABCD est une pyramide de volume $V = \frac{243}{4}$ et dont la base ABCD est un carré d'arête AB = $\frac{9}{2}$

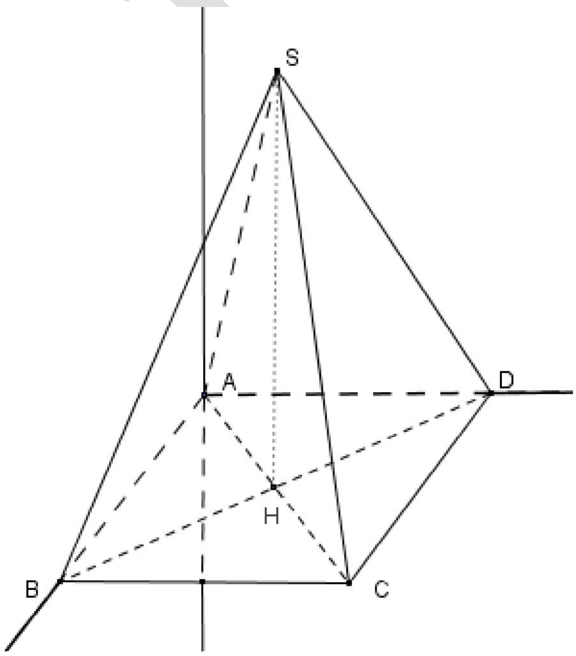
1. Soit H le projeté orthogonal de S sur le plan (ABC), la hauteur SH de la pyramide SABCD est :

a) 18 b) 9 c) $\frac{9}{2}$

2. Soit h l'homothétie de centre S et transformant A en M tel que $M \in [SA]$ et SA = $\frac{3}{2}$SM.

Soit (Q) le plan parallèle au plan (ABC) passant par M. (Q) coupe respectivement les droites (SB) et (SC) en N et P . Le volume du tétraèdre SMNP est:

a) 9 b) $\frac{81}{4}$ c) $\frac{81}{6}$



3. L'espace est muni du repère orthonormé direct $\left(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

l'expression analytique d' une translation qui transforme le plan (ABC) en (MNP) est :

a) $\begin{cases} x' = x + \frac{3}{2} \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + \frac{3}{2} \\ z' = z \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = z + \frac{3}{2} \end{cases}$

Exercice 2:

L'espace (E) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S l'ensemble des points M (x,y,z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

1) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R.
2) Soit P_m : $x + y + z - m = 0$, où m est un paramètre réel.

a. Etudier suivant les valeurs de m la position relative de P_m et S.

b-Montrer que P_1 et S sont sécants suivant à cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
Donner une équation cartésienne de la sphère S' de même rayon que(C) et contenant (C).

3) Soit f l'application de l'espace dans lui-même qui à tout point M(x, y, z) associe le

M'(x',y',z') tel que : $\begin{cases} x' = -2x - 3 \\ y' = -2y + 3 \\ z = -2z + 6 \end{cases}$

a. Montrer que f est une homothétie dont on précisera le centre J et le rapport k.

b. Déterminer une équation cartésienne de f(S) et f(P_1).

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Soit S l'ensemble des points

M (x , y , z) tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ et P le plan : 2x +2y - z - 3 = 0

1°/ a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω est le rayon R.

b) Montrer que P coupe S suivant un cercle ζ que l'on caractérisera.

2°/ Soit t la translation de vecteur $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$

a) Ecrire une équation cartésienne du plan P' = $t_{\vec{u}}(P)$. b) Montrer que P ' est tangent à S.

3°/ Soit I (1 , 1 , 1) et h l'homothétie de centre I et rapport - 2.

a) Montrer que h (P) = P .

b) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S' image de S par h . caractériser alors S'$\cap$P

Exercice 4 : L'espace est rapporte a un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$; on considère les points

$A(0,0,1);B(1,0,1)$; $C(2,1,-1)$ et $I(-2,1,2)$

1) a) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En déduire que les points A , B et C déterminent un plan P dont on déterminera une équation cartésienne

b) Calculer l'aire du triangle ABC .

c) Calculer $d\left(C,(AB)\right)$ la distance du point C a la droite (AB)

2) a) Calculer $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AI}$, En déduire que les points A , B , I et C déterminent un tétraèdre

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCI , en déduire $d(I,P)$ la distance entre I et P

3) Soit S la sphère de centre I et passant par A . Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle (C) que l'on car.

4) Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $k=\frac{1}{5}$

a)Déterminer S' l'image de S par h

b) Déterminer les coordonnées du point $A'=h(A)$

c) Déterminer P' l'image de P par h d) Montrer que $S'\cap P'$ est un cercle (C') que l'on caractérisera

Exercice 5 : Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, on considère les points A(1,3,2) , B(1,-1,-2) et C(2,4 ,1).

1) a) montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : 2x-y+z-1=0.

2) Soit S la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2z-4=0$.

a) Déterminer le centre I et le rayon r de la sphère S.

b) Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC)suivant le cercle Γ de diamètre $[AB]$

c) Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle Γ.

3) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3 et S' l'image de la sphère S par h.

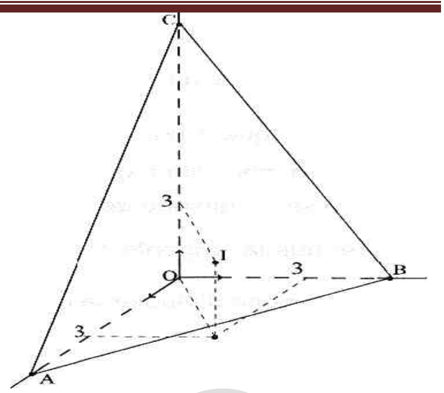
a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre J.

b) Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle Γ'.

c) Montrer que (AC) est tangente au cercle (Γ') en un point E que l'on précisera.

Exercice 6 :

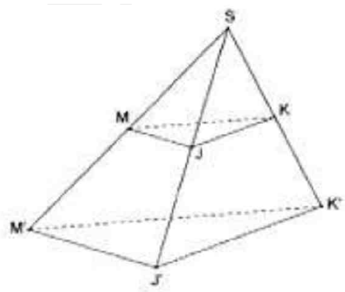
Soit $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ un repère orthonormé direct de l'espace .Dans la figure ci-contre OABC est un tétraèdre tel que : $\overrightarrow{OA}=5\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=5\vec{v}$, $\overrightarrow{OC}=10\vec{w}$
I est le point de coordonnées (3,3,3).



1) Vérifier que le plan (ABC) a pour équation
$2x + 2y + z- 10 = 0$.
2) Soit S la sphère de centre 1 et de rayon 3.
a) Quelle est la position relative de S et du plan (ABC) ?
b) Montrer que S est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).
3) Soit k un réel non nul et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
On désigne par S', la sphère image de S par h.
a) Montrer que S' est tangente aux plans (OAB), (OAC) et (OBC).
b) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles S' est tangente au plan (ABC).
4) Déterminer le centre et le rayon de la sphère tangente intérieurement aux quatre faces du tétraèdre OABC.

<u>Exercice 7</u>: (bac 2013)

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$

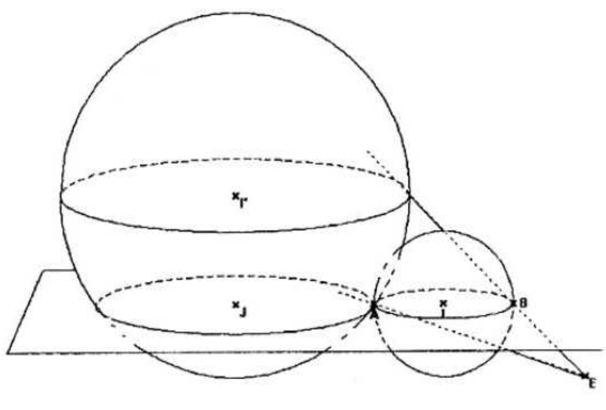


On considère les points I(1.1,0) , J(0.1,1) et K(1.0.-1).
1) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.
c) En déduire que les points I, J et K déterminent un plan P dont une équation est x - y + z = 0.
2) Soit le point S(1.-1,1). Montrer que le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.
3) Soit la droite Δ passant par I et parallèle à la droite (JK) et soit M un point quelconque de Δ .
a) Montrer que $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$.
b) Déterminer alors le volume du tétraèdre SMJK.
4) Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 2.
a) Déterminer une équation du plan P' image du plan P par h.
b) Le plan P' coupe les demi-droites [SM) ; [S J) et [S K)
Montrer que le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $\frac{7}{2}$

<u>Exercice (bac 2015 ctr) :</u>

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace .

On considère les points A(-2,3,2) et B(2,3,2) et l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$.



1 1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.
b) Montrer que [AB] est un diamètre de S .
2) Soit P le plan d'équation z = 2 et soit J (-6,3,2).
a) Vérifier que I appartient au plan P et en déduire que la sphère S coupe P suivant le cercle Γ de diamètre [AB].

b) Dans le plan P on considère le cercle Γ' de centre J et de rayon 4.
Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents extérieurement en A .

3) Soit E le point de coordonnées (4,3,0) .On considère l'homothétie h de centre E , de rapport $\frac{5}{2}$ et on désigne par S' la sphère image de S par h.

a) Déterminer le rayon de S' et les coordonnées de son centre I'.

b) Justifier que le plan P coupe la sphère S' suivant le cercle Γ'.

c)La droite (EA) recoupe S' en A'. Soit B' le point diamétralement opposé à A' sur la sphère S .

Montrer que les points E , B et B' sont alignés.