Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences Techniques)

Session principale 2018

Exercice 1 :(5 points)

1) a) $e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\left(\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) = 2i\sin\frac{\pi}{4}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} = i\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$; $\left(\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $z_1{}^2 - \left(2i\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}\right)z_1 - 4e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} - 4i\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{12}}.e^{i\frac{\pi}{3}} - 4e^{i\frac{\pi}{6}}$

$= 4\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{6}}\right) - 4i\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}}$

$= 4i\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} - 4i\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{12}} = 0$

D'où z_1 est solution de l'équation(E)

c) $z_1 z_2 = -4\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc $z_2 = \dfrac{-4\, e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\, e^{i\frac{\pi}{3}}} = -2\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$

d) $z_1 = -2\, e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

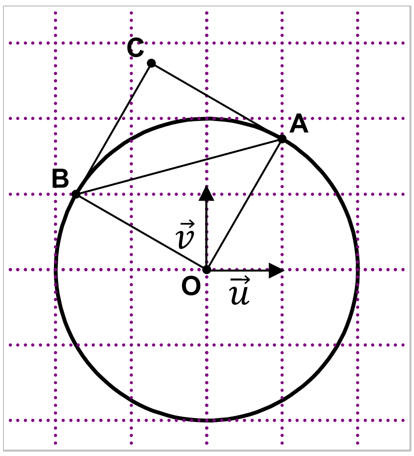
$z_2 = -2\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = -2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$

2) a) $iz_A = i\left(1 + i\sqrt{3}\right) = i - \sqrt{3} = z_B$

b) $\dfrac{\text{aff}(\overrightarrow{OB})}{\text{aff}(\overrightarrow{OA})} = \dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{iz_A}{z_A} = i$ donc $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ainsi OAB est rectangle en O

$\left|\dfrac{z_B}{z_A}\right| = \dfrac{|z_B|}{|z_A|} = |i| = 1$ donc $|z_A| = |z_B|$d'où $OA = OB$ et par suite OAB est isocèle en O

c)



3) a) $z_C - z_B = \left(1 - \sqrt{3}\right) + i\left(1 + \sqrt{3}\right) + \sqrt{3} - i = 1 + i\sqrt{3} = z_{\overrightarrow{OA}}$ donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$

d'où OACB est un parallélogramme ; et comme le triangle OAB est isocèle et rectangle en O, donc OACB est un carré.

b) Voir figure ci-dessus.

c) OACB est un carré de cote 2 donc $OC = 2\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\arg(z_C) &= (\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) + 2k\pi \\ &= \arg(z_A) + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &= \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\end{aligned}$$

d'où $z_C = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}$

<u>Exercice 2</u> : (4,5 points)

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-5\\0\\-5\end{pmatrix} \neq \vec{O}$ d'où $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires ; et par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) $P = (ABC)$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à P

Donc une équation de P est $-5x - 5z + d = 0$

$A(1,2,-1) \in P$ donc $-5 + 5 + d = 0$ ainsi $d = 0$

Et par suite $P: -5x - 5z + d = 0$ donc $x + z = 0$ est une équation cartésienne de P

2) $\Delta: \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2 \\ z = \alpha - 1 \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

a) $A(1,2,-1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha + 1 \\ 2 = 2 \\ -1 = \alpha - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ 2 = 2 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ donc $A \in \Delta$

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ. Comme $\vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\Delta \perp P$

3) $I_\alpha(1 + \alpha, 2, \alpha - 1) \in \Delta$

a) $d(I_\alpha, P) = \frac{|\alpha+1+\alpha-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|2\alpha|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}|\alpha|$

b) $d(I_\alpha, P) > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha| > 2$ donc :

si $\alpha \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors le plan est extérieur à la sphère(S_α)

Si $\alpha = 2$ ou $\alpha = -2$ alors le plan P est tangent à la sphère(S_α)

Si $\alpha \in]-2,2[$ alors le plan P est sécant à la sphère(S_α)

4) a) $B(2,0,-2) \in S_\alpha$ donc $I_\alpha B = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow I_\alpha B^2 = 8$

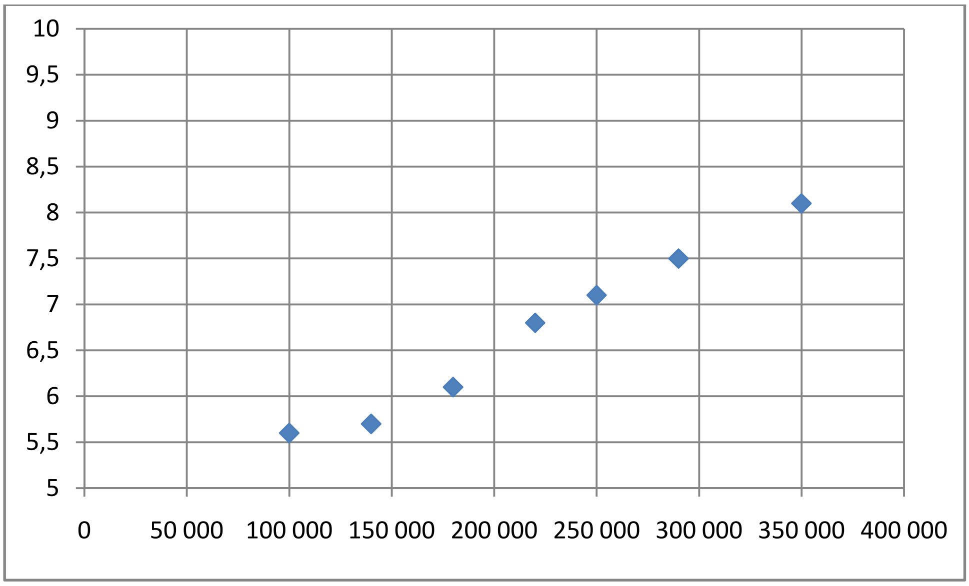
$$\Leftrightarrow (2-\alpha-1)^2 + (0-2)^2 + (-2-\alpha+1)^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow (1-\alpha)^2 + 4 + (-1-\alpha)^2 = 8$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 6 = 8$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ où } \alpha = -1$$

b) $-1 \in]-2,2[$ et $1 \in]-2,2[$ donc $S_\alpha \cap P$ $(\alpha = 1$ où $\alpha = -1)$ est un cercle.

Comme $I_\alpha \in \Delta$ et $\Delta \perp P$ en A ; alors A est le projeté orthogonal de I_α sur P donc $S_\alpha \cap P$ est le cercle $\mathcal{C}_\alpha$ de centre A et de rayon $r = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2^2}} = \sqrt{6}$

<u>Exercice 3</u> :(4 points)

1) a)



b) $r = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_X\, \sigma_Y} = 0{,}990$

c) le coefficient de corrélation $r > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

On peut envisager un ajustement affine de la série(X, Y)

2) a) L'équation de la droite de régression de Y en X est :

$y = ax + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)} \cong 1{,}078 \times 10^{-5}$; $b = \overline{Y} - 1{,}078 \times 10^{-5} \times \overline{X} = 4{,}344$

D'où $y = 1{,}078 \times 10^{-5}x + 4{,}344$

b) l'équation de la droite de régression de X en Y est : $x = a'y + b'$ avec :

$a' = \dfrac{cov(X,Y)}{V(Y)} = 91011{,}236$ et $b' = \bar{X} - 91011{,}236 \times \bar{Y} = -391203{,}853$

D'où $x = 91011{,}24y - 391203{,}85$

3) $x = 400\,000$ donc la consommation $y = 1{,}078 \times 10^{-5} \times 400\,000 + 4{,}344 = 8{,}66$

4) $y > 8{,}5 \Leftrightarrow x > 91011{,}24 \times 8{,}5 - 391203{,}85 \Leftrightarrow x > 382391{,}69$

Exercice 4 : (6,5 points)

1) $h(x) = x - 1 + x\,ln\,x \;\; ; \;\; x \in \,]0, +\infty[$

a) $h(1) = 1 - 1 + ln\,1 = 0$

b)

x	0		1		$+\infty$
$h(x)$	||	$-$	0	$+$	

2) $f(x) = 1 + (x-1)\,ln\,x \;\; ; x \in \,]0, +\infty[$

a) $lim_{x \to 0^+} f(x) = lim_{x \to 0^+} 1 + (x-1)\,ln\,x = +\infty.$

La courbe(C)admet une asymptote vertical d'équation $x = 0$

b) $lim_{x \to +\infty} f(x) = lim_{x \to +\infty} 1 + (x-1)\,ln\,x = +\infty$ et

$lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = lim_{x \to +\infty} \frac{1+(x-1)\,ln\,x}{x} = lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + \frac{x-1}{x}\,ln\,x = +\infty$. La courbe(C) admet un branche parabolique de direction celle de$(o, \vec{j})$au voisinage de $+\infty$

3) a) Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$, $f'(x) = ln\,x + \frac{x-1}{x} = \frac{x\,ln\,x + x - i}{x} = \frac{h(x)}{x}$

b) Pour tout $x \in \,]0, +\infty[$ le signe de$\big(f'(x)\big)$ est celui du signe de$\big(h(x)\big)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + (x-1)\,ln\,x = x$

$\Leftrightarrow x - 1 - (x-1)\,ln\,x = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(1 - ln\,x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = e$

b) $f(x) \leq x \Leftrightarrow (x-1)(1 - ln\,x) \geq 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$x - 1$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$1 - ln\,x$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$(x-1)(1 - ln\,x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'où $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in [1, e]$

c) Position de (C) et $\Delta: y = x$

$x - f(x) = (x-1)(1 - \ln x)$

x	0	1	e	$+\infty$
$x - f(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	
Position de (C) et Δ	(C)est au dessus de Δ	(C)est au dessous de Δ	(C)est au dessus De Δ	

Les points de coordonnées$(1,1)$ et (e,e) sont les points d'intersection de (C) et Δ

5) Voir Annexe.

6) a) $\int_1^e (x \ln x)\, dx$; On pose :$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Donc $\int_1^e (x \ln x)\, dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2 \ln x}{2}\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

b) $A = \int_1^e x - f(x)\, dx$

$= \int_1^e (x-1)\, dx - \int_1^e x \ln x\, dx + \int_1^e \ln x\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{x}\right]_1^e - \left(\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\right) + [x \ln x - x]_1^e$

$= \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4} + 1$

$= \frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4}$

7) On considère la suite(u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) Par récurrence :

Pour $n = 0$; $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq e$. Vrai pour $n = 0$

Supposons que $1 \leq u_n \leq e$; pour $n \geq 0$

Démontrons que $1 \leq u_{n+1} \leq e$

$1 \leq u_n \leq e$ et f est croissante sur$[1, e]$ donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(e)$

Ainsi $1 \leq u_{n+1} \leq e$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in [1, e]$

b) $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ or $f(x) \leq x \Leftrightarrow x \in [1, e]$

Comme $u_n \in [1, e]$ alors $f(u_n) \leq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_n$, ainsi (u_n) est décroissante.

c) La suite(u_n) est décroissante et minorée par 1

Donc elle converge vers $\mathrm{l} \in [1, \mathrm{e}]$

Comme f est continue sur$[1, \mathrm{e}]$ donc en l d'où $\mathrm{f(l)} = \mathrm{l}$ et par suite $\mathrm{l} = 1$ ou $\mathrm{l} = \mathrm{e}$

Or $(\mathrm{u_n})$ est décroissante et $u_0 = 2 < e$ donc $\mathrm{l} = 1$

Feuille Annexe