Math Las
Lassad Ghadhab

MATHématiques

Révision 2018
BAC
Révision bac sciences

4ème
sciences

ENSEIGNANT
GHADHAB LASSAD

Révision (1) Bac 2017

Etude de fonctions

exponentielle + ln + intégrale + suite

4ème année sciences (23 Exercices)

Exercice N°1 :

Soit f la fonction définie sur IR* par f(x)= $\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

1) Verifier que f admet un prolongement par continuité a gauche en 0
2) Etudier la limite de f a droite en 0 et en $+\infty$ *et* $-\infty$. Interpreter graphiquement les resultats obtenus
3) a) Montrer que $\forall x \in IR^*$ *on a* : $f'(x) = -\frac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$
   b) dresser le tableau de variation de f
   c) Montrer que f(x)=2 admet dans]0,+ +∞[une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$
4) Tracer C_f
5) Pour tout entier naturel n ≥ 2 , on considere l'integrale $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}dx$
   a) Calculer I_2
   b) Montrer a l'aide d'une integration par partie , que $\forall n \geq 2$, $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$
   c) Calculer I_3
   d) Montrer que $\forall x \in [1,2]$ *on a* : $0 \leq \frac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$
   e) En déduire un encadrement de I_n , puis etudier la limite eventuelle de la suite (I_n)

Exercice N°2 :

I) 1°) Soit $g(x) = (1+2x)e^x - 1$, $x \in IR$.

a- Etudier les variations de g et calculer $g(0)$.

b- En déduire le signe de $g(x)$ *pour tout* $x \in IR$.

2°) Soit $f(x) = x(e^x - 1)^2$, $x \in IR$ .On désigne par ζ_f la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm) .

a- Montrer que pour tout $x \in IR$, *on a* : $f'(x) = (e^x - 1)g(x)$

b- Dresser le tableau de variation de f .

c- Montrer que f est une bijection de IR *sur* IR .

d- Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à ζ_f au voisinage de $-\infty$.

e- Etudier la position relative de ζ_f par rapport à la droite Δ .

f- Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes ζ_f *et* $\zeta_{f^{-1}}$ et la droite Δ .

3°) Soit A l'aire du domaine plan limité par les courbes ζ_f *et* $\zeta_{f^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0$ *et* $x = \ln 2$. Calculer , en cm^2, A .

II) Soit la suite $I_n = \int_0^1 x^n(e^x - 1)dx$, $n \in I\!N^*$

1°) Calculer I_1 .

2°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante .

3°) Montrer que pour tout $n \in I\!N^*$ $on\ a$: $0 \le I_n \le \frac{e-1}{n+1}$.

4°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Exercice N°3 :

Soit g la fonction définie sur $I\!R$ par $g(x) = (x+1)e^{-x} - 1$ dont la représentation graphique est donnée dans l'annexe 1(page 4 sur 4)

1) Déterminer graphiquement le signe de g(x) pour $x \in I\!R$

2) Montrer que $\forall\ x \in]-1, +\infty[$; $e^{-x} \le \frac{1}{x+1}$

3) Soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ par :$f(x) = \ln(x+1) + e^{-x}$

a) Etudier les variations de f

b) Montrer qu'il existe un seul réel α tel que $f(\alpha)= 0$
et vérifier que $-1 < \alpha < -0{,}8$

c) Calculer f(0) et tracer $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 4 cm)

4)

a) Montrer que f est une bijection de $]-1, +\infty[$ sur $I\!R$

b) f^{-1} est-elle dérivable en 1

c) Tracer $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ dans le même repère

5) Soit J= $\int_\alpha^0 f(x)dx$

a) A l'aide d'une intégration par partie Montrer que
$\int_\alpha^0 \ln(1+x)dx = \ln(1+\alpha)(-\alpha-1)+\alpha$

b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses les droites d'équations respectives x= α et x=0 .

Montrer que $\mathcal{A} = 16\alpha - 16 + 16(\alpha + 2)e^{-\alpha}$

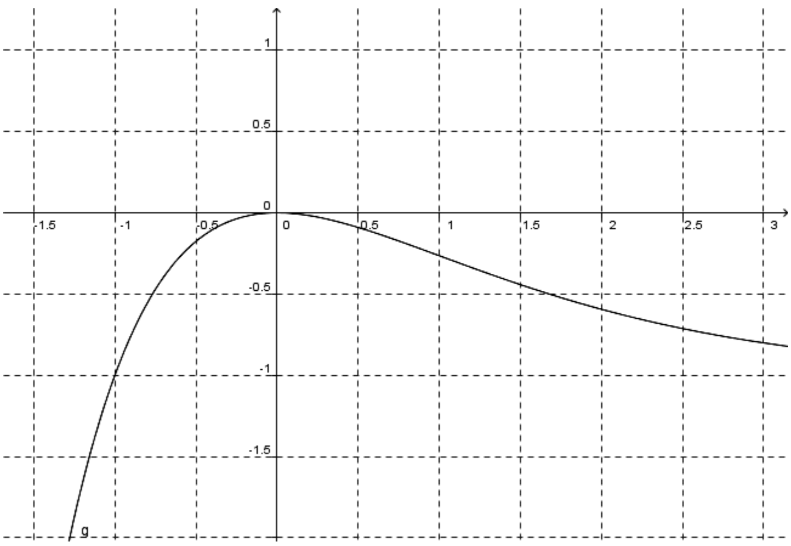
6) Soit u le suite définie sur $I\!N$ par

$u_n = \int_0^n f(x)\,dx$

a) Interpréter géométriquement u_1

b) Montrer que la suite u est croissante

c) Montrer que pour tout n $\in I\!N$ $u_n \ge n$ et en déduire la limite de u_n



Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+2}$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ unité : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|$=2 cm

Partie A

1) Montrer que pour tout réel x on a $f'(x)=\dfrac{7e^x}{\left(e^x+2\right)^2}$ et Dresser le tableau de variation de f

2) a)Montrer que $I\left(\text{Log}\,2\,;\,\dfrac{5}{4}\right)$ est un point d'inflexion

b) Vérifier que I est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$

3) On considère la fonction g définie sur IR par g(x)= f(x) –x

a) Verifier que pour tout reel x : $-e^{2x}+3e^x-4<0$ (Indiction:On pose t= e^x)

b) Etudier les variations de g

c) En deduire que l'équation f(x) =x admet une unique solution α dans IR et vérifier que $\alpha\in\,]2,5;2,6[$

d) Montrer que pour tout $x\in]-\infty,\alpha]$;$f(x)\geq x$. Endeduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$

Partie B

1) Montrer que f réalise une bijection de IR sur J que l'on précisera.

2) Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses

3) Tracer Δ , $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ où $\mathcal{C}'$ courbe représentative de la fonction f^{-1} dans $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Montrer que pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2},3\right[$;$\left(f^{-1}\right)(x)=\text{Log}\left(\dfrac{2x+1}{3-x}\right)$

5) a)Montrer que pour tout réel x on a :$f(x)=\dfrac{7}{2}\left(\dfrac{e^x}{e^x+2}\right)-\dfrac{1}{2}$

b) Montrer que $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\dfrac{7}{2}\text{Log}\left(\dfrac{e^{\alpha}+2}{3}\right)-\dfrac{1}{2}\alpha$

c) Calculer en fonction de α, $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des ordonnées ,la droite Δ et la droite d'équation x= α

Partie C

Soit u la suite définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=f(u_n),n\in IN \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq\alpha$ (indiction : utiliser les variations de f)

2) Montrer que u est une suite croissante (indication : utiliser la question *partie A* 3) d))En déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite

Exercice N°5 :

A- On considère la fonction g définie par $g(x)=e^{1-x}$.

Etudier et tracer la courbe (ζ) de la fonction g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=xe^{1-x}$.

1) On désigne par (ζ') la courbe de f dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Dresser le tableau de variation de f.

b- Déterminer la nature des branches infinies de (ζ').

c- Etudier la position relative de (ζ) et (ζ').

d- Tracer la courbe de f.

2) Soit x un réel de $[1,+\infty[$, M est le point de (ζ) d'abscisse x et N est le point de (ζ') d'abscisse x.

a- Calculer la distance MN en fonction de x.

b- Déterminer la valeur de x pour laquelle MN est maximale.

3) Soit t un réel de $]1,+\infty[$.

a- Calculer, en fonction de t, l'aire $A(t)$ de la partie du plan limitée par les courbes (ζ) et (ζ') et les droites d'équations $x=1$ et $x=t$.

b- Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

C- Soit u la suite définie sur IR^* par $u_n=\int_1^2 (x-1)^n e^{1-x}dx$.

1) a-Calculer u_1.

b-Montrer que u est décroissante et qu'elle est convergente.

2) a-En intégrant par parties, montrer que $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+(n+1)u_n$.

b-En déduire que $\forall n\in IN^*, u_n\leq\frac{1}{ne}$. Calculer alors $\lim u_n$.

c-Calculer $I=\int_1^2\left(x^3-3x^2+2\right)e^{1-x}dx$.

3) Soit F définie sur IR_+^* par $F(x)=\int_1^{1+2\ln x}(t-1)^n e^{1-t}dt$.

a- Montrer que F est dérivable sur IR_+^* et que $F'(x)=2^{1+n}\frac{(\ln x)^n}{x^3}$.

b- En déduire que $\forall x\in IR_+^*, F(x)=2^{1+n}\int_1^x\frac{(\ln t)^n}{t^3}dt$. Calculer alors $\int_1^{\sqrt{e}}\frac{(\ln t)^4}{t^3}dt$.

Exercice N°6 :

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{e^x}{e^x-x}$, on désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé

1) a) Montrer que : $\forall x\in IR$ on a : $e^x-x\geq 1$ et $\forall t\succ 0$ on a : $t-\ln t\geq 1$

b) Vérifier alors que f est définie sur IR

c) Etudier les variations de f, en déduire que $\forall x\geq 0$ on a : $1\leq f(x)\leq\frac{e}{e-1}$ puis tracer la courbe C

2) Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x)=\int_0^{\ln(x)} f(t)\,dt$

a) Montrer que: $\forall x\geq 1$ on a : $\ln x\leq F(x)\leq\left(\frac{e}{e-1}\right)\ln x$

b) En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$

c) Montrer que F est dérivable sur $[1,+\infty[$ et que $\forall x\geq 1$ on a : $F'(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$

d) En déduire que : $\forall x\geq 1$ on a : $F(x)=\int_1^x \dfrac{dt}{t-\ln t}$

e) Soit (Γ) la courbe de F dans un autre repère orthonormé
Ecrire une équation de la demi tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse 1, puis étudier la Position de (T) et (Γ)

Exercice N°7:

Soit la fonction h définie sur $]0,+\infty[$, par $h(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

1-/ a) Montrer que h est strictement décroissante $]0,+\infty[$.

b) Montrer que h admet une réciproque g définie sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$, $g(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$.

c) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que : $\ln 2<\alpha<1$.

2-/ Soit la fonction f définie sur IR^*, par $f(x)=x-\dfrac{1}{e^x-1}$.

Soit (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que la courbe (ζ_f) admet deux asymptotes obliques D et D' d'équations respectives $y=x$ et $y=x+1$

c) Montrer que $I\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe (ζ_f).

d) α étant le réel définie au 1-/c), montrer que $f'(\alpha)=1+\alpha+\alpha^2$ et écrire une équation de la tangente (T) à (ζ_f) au point A d'abscisse α.

e) Tracer D, D' ,(T) et (ζ_f). (on prendra $\alpha\approx 0{,}8$).

3-/ a) Montrer que la fonction $F: x\mapsto \dfrac{x^2}{2}-\ln\left(1-e^{-x}\right)$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Préciser le signe de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de F.

c) chercher $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{F(x)}{x}$ et donner l'allure de la courbe (Γ) de la fonction F. (nouvelle figure)

Exercice N°8:

Bac Principale 2017

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(x+1)}$ et (C) sa courbe représentative dar un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Vérifier que pour tout réel $x\in\,]0,+\infty[$, $\ln(x+1)=\ln(x)+\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x\in\,]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)+\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2(x+1)}$.

b) En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

d) Tracer la courbe (C) tout en précisant son intersection avec l'axe des abscisses.

3) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,1[$.

4) Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on pose $a_n=f^{-1}(\dfrac{1}{n})$.

a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

b) Montrer que a_n est une solution de l'équation $x^n=x+1$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^n$.

Exercice N°9 :

I - Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{-x}$ et (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer une équation de la tangente à (Γ) au point d'abscisse 0 .
2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $1 - x \leq e^{-x} \leq 1$.

   b) En déduire que pour tout $x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq 1 - e^{-x} \leq x$.

II - On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer la limite de f(x) lorsque x tend vers + ∞.

   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.

   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que le point I $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$ est un point d'inflexion de la courbe ($\mathscr{C}$).

   b) Donner une équation de la tangente T à la courbe ($\mathscr{C}$) au point I.

3) Dans la **figure 1** de l'annexe ci-jointe, on a représenté la courbe (Γ) dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Construire I.

   b) Construire la tangente T.

   c) Tracer la courbe ($\mathscr{C}$).

4) Soit A_k l'aire du domaine plan limité par la courbe ($\mathscr{C}$), la droite d'équation y = 1 et les droites d'équations x = k et x = k + 1 où k est un entier naturel non nul.

   a) En utilisant I 2) b) montrer que $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] \leq A_k \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k$.

5) Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

   a) Interpréter graphiquement S_n .

   b) Montrer que $\ln(n+1) - \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] \leq S_n \leq \ln(n+1)$.

   c) En déduire les limites de S_n et de $\frac{S_n}{\ln(n)}$, quand n tend vers l'infini.

Exercice N°10 :

Soit la fonction h définie sur $[0,+\infty[$, par $\begin{cases} h(x) = -1 + x\ln x \\ h(0) = -1 \end{cases}$.

1-/ a) Montrer que h est continue sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que pour $x>0$, $h'(x)=\ln x-\ln\frac{1}{e}$.

c) Dresser le tableau de variation de h .

2-/ a) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que : $1<\alpha<2$.

b) Déduire de ce qui précède que : $h(x)\geq 0$ si et seulement si $x\geq\alpha$.

3-/ Soit la fonction f définie sur IR, par $f(x)=\dfrac{e^x-x}{e^x+1}$.

a) Montrer que pour tout $x\in IR$, on a : $f'(x)=\dfrac{h(e^x)}{(e^x+1)^2}$.

b) Montrer en utilisant 2-/ b), que $f'(x)\geq 0$ si et seulement si $x\geq\ln\alpha$.

c) Donner un encadrement de $\ln\alpha$ et montrer que $f(\ln\alpha)=\dfrac{\alpha-Log\alpha}{\alpha+1}=1-\dfrac{1}{\alpha}$.

d) Dresser le tableau de variation de f .

4-/ a) Montrer que la courbe (ζ_f) admet au voisinage de ($-\infty$)une asymptote oblique D d'équation $y=-x$.

b) Etudier la position de la courbe (ζ_f) par rapport à la droite D.

c) Tracer dans un repère orthonormé, la droite D et la courbe (ζ_f). (on prendra $\alpha\approx 1{,}5$). (unité 2cm)

Exercice N°11 :

Partie A :

1. Démontrer que pour tout réel x, $e^x\geq x+1$.

2. En déduire que pour tout réel $t>0$, $t\geq 1+\ln t$.

3. Prouver en utilisant les deux inégalités précédentes, que $\forall x>0, e^x-\ln x-1>0$.

Partie B :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=(1+e^{-x})\ln x$.

On note $(C\ )$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité graphique 2 *cm*.

1. a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

Prouver que pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ est du signe de : $e^x+1-x\ln x$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x)=e^x+1-x\ln x & \text{si } x>0 \\ h(0)=2 \end{cases}$

a) h est-elle continue en zéro **?**

b) Étudier le sens de variations de h.

c) En déduire le signe de $h(x)$ pour $x>0$.

3. Déduire des questions précédentes, le tableau de variations de f .

4. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $(C\ )$ au point d'abscisse 1.

b) Tracer la droite T et la courbe $(C\ )$.

5. On définit la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ par $U_n=\int_n^{n+1} f(x)\ dx$.

a) Donner une interprétation géométrique de U_n.

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $f(n)\leq U_n\leq f(n+1)$.

c) En déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$.

d) La suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ est-elle convergente **?**

Partie C :

On considère la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x f(t)\ dt$.

1. Étudier le sens de variations de la fonction F.
2. Quel est le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x **?**

3. a) Démontrer que pour tout réel $x\geq 1, F(x)\geq \int_1^x Log(t)\ dt$.

b) En déduire la limite de F en $+\infty$.

Exercice N°12:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est **3*cm***.

A . Étude de *f* :

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=\ln(e^x+e^{-x})$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$, on a $f(x)=x+\ln(1+e^{-2x})$

c) En déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet comme asymptote la droite D d'équation $y = x$.

d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à son asymptote D.

2. a) Montrer que f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Construire la courbe $\mathscr{C}$ et l'asymptote D.

B. Réciproque de f :

1. a) Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[\ln 2\ ,+\infty[$.

b) On note f^{-1} la réciproque de f. Dresser le tableau de variation de f^{-1}.

c) Vérifier que le point $A\left(\ln 2\ ;\ \ln\dfrac{5}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$. Puis calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln\dfrac{5}{2})$

2. Montrer que pour tout réel x de $[\ln 2\ ,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{e^x+\sqrt{e^{2x}-4}}{2}\right)$.

C. Intégrales liées à f :

Pour tout x de l'intervalle $[0;+\infty[$ on pose $F(x)=\int_0^x \ln(1+e^{-2t})\ dt$. (**On ne cherchera pas à calculer *F*(*x*)**).

1. Soit a un réel positif. En utilisant la partie **A**, donner une interprétation géométrique de $F(a)$.

2. Étudier le sens de variation de F sur l'intervalle $[0;+\infty[$

3. Soit a un réel strictement positif.

Démontrez que, pour tout t de $[0;a]$: $\dfrac{1}{1+a}\leq\dfrac{1}{1+t}\leq 1$. En déduire que $\dfrac{a}{1+a}\leq\ln(1+a)\leq a$.

4. Soit x un réel positif. Déduire de la question (**3.**) : $\int_0^x \dfrac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}}\ dt\leq F(x)\leq\int_0^x e^{-2t}\ dt$ puis

$\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{1}{2}\ln\left(1+e^{-2x}\right)\leq F(x)\leq\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-2x}$

5. On admet que la limite de $F(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$, existe et est un nombre réel noté L.

Établir que : $\dfrac{1}{2}\ln 2\leq L\leq\dfrac{1}{2}$

6. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t})\ dt$

a) On considère la fonction h définie sur [0 ; + ∞ [par $h(t) = \ln(1+e^{-2t})$ Étudier le sens de variation de h.

b) Démontrer que pour tout naturel n : $0 \le U_n \le \ln(1+e^{-2n})$

c) Déterminer la limite de (U_n) lorsque n tend vers + ∞ .

7. Pour tout naturel n on pose $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} U_i$. Exprimer S_n à l'aide de F et de n.

La suite (S_n) est –elle convergente ? Dans l'affirmative, quelle est sa limite ?

Exercice N°13 :

La courbe de la fonction f admet comme :

- D :x=0 une asymptote verticale
- Test la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1
- $\mathscr{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées

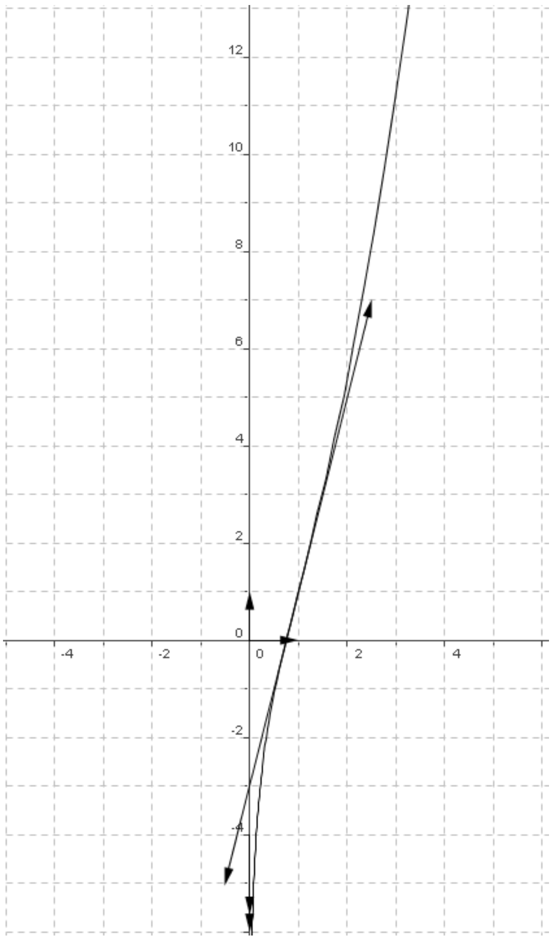
A)

1) Par une lecture graphique calculer

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

b) Calculer $f'(1)$ puis écrire l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse1

c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T



2) On suppose que $f(x) = x^2 + 2\ln(x)$

a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que l'équation f(x)=0 admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α

c) Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

3)

a) Calculer $I = \int_1^e \ln(x)dx$

b) En déduire l'aire de la région du plan limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=e

B) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

1) Montrer que $f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$

2)

a) Montrer que g est dérivable sur IR et pour tout réel x ; $g'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction g

c) Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(x)| \le \frac{9}{10}$

d) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissement finis que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2},1\right]$,

$|g(x)-\alpha| \le \frac{9}{10}|x-\alpha|$

3) Soit u la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \le u_n \le 1$

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{9}{10}|u_n - \alpha|$

c) Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \le \left(\frac{9}{10}\right)^n |1-\alpha|$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice N°14 :

On considère la suite réelle (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$

1)a) Montrer par récurrence que , pour tout entier naturel n, on a $u_n \succ 4$

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite

2) soit (w_n) la suite réelle définie sur IN par $w_n = \ln(u_n - 4)$

a) Montrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison -2ln2.

b) vérifier que pour tout entier naturel n, on a $w_n =(1-2n)\ln 2$

c) Calculer u_n en fonction de n

d) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \prec 4+2.10^{-4}$

Exercice N°15 :

On Considère la suite (u_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \ln\left(1+e^{u_n}\right) \end{cases}$; pour tout $n \in IN$.

I – 1-/ Calculer u_1, u_2 et u_3.

2-/ Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $u_n \ge 0$.

3-/ a) Montrer, que pour tout $n \in IN$, $u_{n+1} = u_n + \ln\left(1+e^{-u_n}\right)$.

b) En déduire la monotonie de la suite u .

II – 1-/ Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $u_n = \ln(n+1)$.

2-/ a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Que peut –on déduire de la convergence de la suite u .

b) Déterminer la plus petite valeur n_0 pour que : $u_n \le 2$. ($n_0 \in IN$)

3-/ Soit la suite (v_n) définie sur IN par : $v_n = u_n + \ln\left(\frac{1}{2n+1}\right)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice N°16 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$ et soit ζ sa courbe relativement à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

A/ 1) Dresser le tableau de variation de f puis construire sa courbe ζ.

2) a-Montrer que f est une bijection de IR sur IR_+^*.

b-Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x>0$ et construire sa courbe ζ'.

3) a-Vérifier que pour tout réel x, on a $f(x)=e^x-\dfrac{e^x}{1+e^x}$.

b-Soit $\lambda<0$. Calculer l'aire A_λ du domaine plan limité par la courbe ζ', l'axe des ordonnées et les droites d'équations respectives $y=\lambda$ et $y=0$.

B/ Pour tout $n\in IN^*$ et pour tout réel $x<0$, on pose $F_n(x)=\displaystyle\int_x^0\frac{e^{nt}}{1+e^t}dt$.

1) a- Calculer $F_1(x)$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}F_1(x)=\ln 2$.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}F_2(x)$.

2) Montrer que $\forall n\in IN^*$, on a $F_{n+1}(x)+F_n(x)=\dfrac{1}{n}\left(1-e^{nx}\right)$.

3) a- Vérifier que pour tout réel $t\le 0$, $2e^t\le 1+e^t\le 2$.

b- Montrer que pour tout entier $\forall n\ge 2$ et pour tout réel $x\le 0$ on a $\dfrac{1}{2n}\left(1-e^{nx}\right)\le F_n(x)\le\dfrac{1}{2(n-1)}\left(1-e^{(n-1)x}\right)$

c- En déduire un encadrement de $R_n=\lim\limits_{x\to-\infty}F_n(x)$ pour $n\ge 2$.

Exercice N°17 :

Soit n un entier naturel non nul. f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f_n(x)=x(1-\ln x)^n & \text{si } x>0\\ f_n(0)=0\end{cases}$

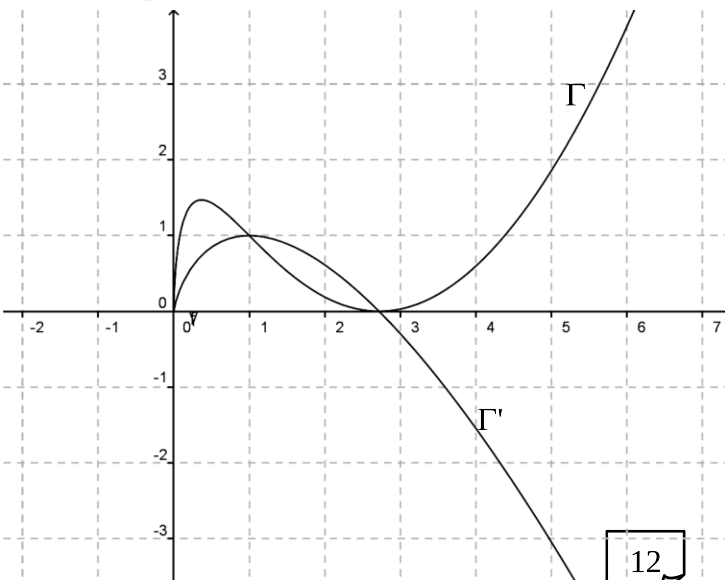
On note (ζ_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On a représenté les courbes Γ et Γ'

1) a- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_2(x)$

b- Identifier chacune des courbes (ζ_1) et (ζ_2) parmi les courbes représentées Γ et Γ'.

c- Etudier la position relative de (ζ_1) et (ζ_2)



2) Pour tout entier $n\ge 1$, on pose $u_n=\displaystyle\int_1^e f_n(x)dx$

a) Vérifier que la fonction $x\to x^2\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{\ln x}{2}\right)$ est une primitive de f_1 sur $]0,+\infty[$ puis Calculer u_1.

b) En utilisant une intégration par parties ; montrer que $\forall n\ge 1$;on a $u_{n+1}=-\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{n+1}{2}\right)u_n$

c) En déduire l'aire du domaine délimité par les courbes (ζ_1) et (ζ_2) et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$

3) Soit F la fonction définie sur $\left]-\infty,0\right]$ par $F(x)=\int_{e^x}^{1}\frac{f_1(t)}{1+t^2}dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\infty,0\right]$ et que $F'(x)=\frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

b) En déduire le sens de variation de F sur $\left]-\infty,0\right]$

c) Montrer que $\forall x\in\left]-\infty,0\right]$; $\frac{1}{2}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt\le F(x)\le\frac{1}{1+e^{2x}}\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

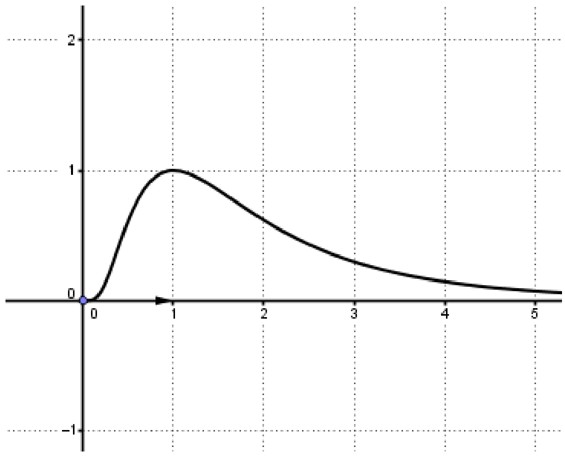
d) Calculer $\int_{e^x}^{1}f_1(t)dt$

e) On suppose que F admet une limite finie L quand x tend vers $-\infty$; Montrer que $\frac{3}{8}\le L\le\frac{3}{4}$

Exercice N°18 :

Soit la fonction f définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} f(x)=e^{-(\ln x)^2} & \text{si } x\succ 0\\ f(0)=0 \end{cases}$

sa représentation graphique (C) admet une demi tangente à droite horizontale en O(0,0).
L'axe des abscisses est une asymptote à (C)



1°) a- Déterminer à partir du graphique $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$

b- Montrer que f '(x)= -2g(x) f(x) pour tout x$\succ 0$ où g une fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ que l'on précisera.

c-Montrer que pour tout x $\in\left[1,+\infty\right[$, $|g(x)|\le\frac{1}{e}$,(On pourra étudier les variations de g sur $\left[1,+\infty\right[$)

d- Déduire que pour tout x, x' dans $\left[1,+\infty\right[$, $|f(x)-f(x')|\le\frac{2}{e}|x-x'|$

2°) On considère la fonction F définie sur $\left[0,+\infty\right[$ par : $\begin{cases} F(x)=\frac{1}{x}\int_1^{e^x}\frac{f(t)}{t}dt & ,x\succ 0\\ F(0)=1 \end{cases}$

a- Justifier que la fonction H :$x\to\int_1^{e^x}\frac{f(t)}{t}dt$ est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que H'(x)=e^{-x^2} pour $x\in\left]0,+\infty\right[$

En déduire que, pour tout $x\succ 0, F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x e^{-u^2}du$

b- pour x$\succ 0$ vérifier que pour tout u $\in[0,x]$, $e^{-x^2}\le e^{-u^2}\le 1$,

Déduire que $\forall$ x$\in\left]0,+\infty\right[$, $|F(x)-F(0)|\le 1-e^{-x^2}$

c- Déduire que F est continue à droite en 0 et dérivable a droite en 0 .

d- Montrer que F'(x)=$\frac{e^{-x^2}}{x}-\frac{F(x)}{x}$, pour tout x$\in\left]0,+\infty\right[$

e-Montrer en utilisant la relation de Chasles que pour tout x$\in\left]1,+\infty\right[$,F(x)$\le\frac{1}{x}(1+\int_1^x e^{-t}dt)$,

Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$

Exercice N°19 :

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

1) On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y' - y = \dfrac{-e^{2x}}{(1+e^x)^2}$.

   a. Vérifier que f est une solution de (E) .
   b. Soit h une fonction dérivable sur IR
      Montrer que h est une solution de (E) si et seulement si h- f est une solution de l'équation (E_0) : $y' - y = 0$.
   c. Résoudre l'équation (E_0) et en déduire les solution de (E);
   d. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur $\dfrac{1}{2}$ en 0.

Montrer que l'équation f(x) = x admet dans IR une unique solution α et que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

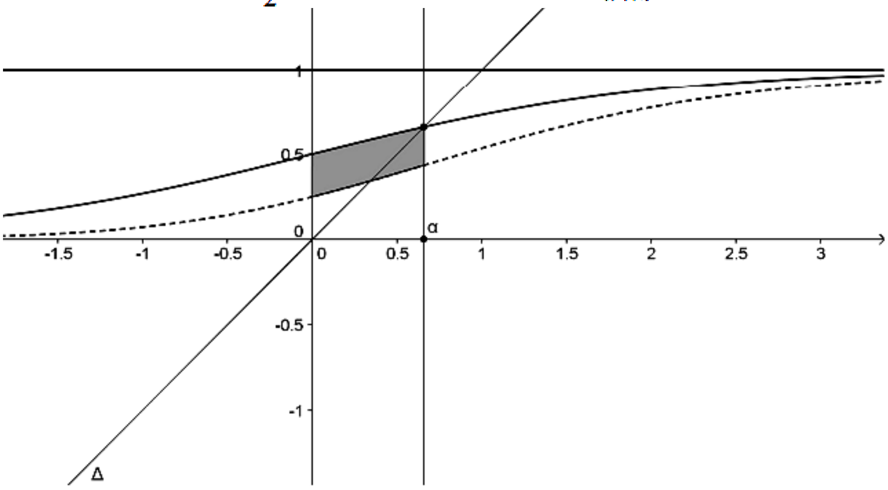
3) Sur la page donnée en annexe on tracé les courbes de f et f^2.
   a) Identifier ces deux courbes (sur la feuille annexe à rendre).
   b) Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) - f^2(x) = f'(x)$.
   c) Calculer l'aire de la partie du plan hachurée.

4) Pour tout entier $n \geq 1$, On pose $I_n = \int_0^\alpha f^n(x)dx$.

   a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{2^n} - \alpha^n)$.

   b) Montrer que (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

   c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{\alpha}{2^n} \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.



Exercice N°20:

1) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}\ln x$.

   a- Dresser le tableau de variation de g .

   b- Montrer que l'équation $g(x) = 1$ admet dans $[1,+\infty[$ une unique solution α . Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

2) Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\ln x}$ et ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   a- Etudier la dérivabilité de f à droite de 1. Interpréter graphiquement le résultat.

   b- Dresser la tableau de variation de f .

3) L'annexe représente les courbes représentatives ζ_1, ζ_2 et ζ_3 respectives des fonctions : $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ et $x \mapsto 2\sqrt{\ln x}$.

   a- Placer dans l'annexe , les points d'intersection de ζ_f et ζ_2.

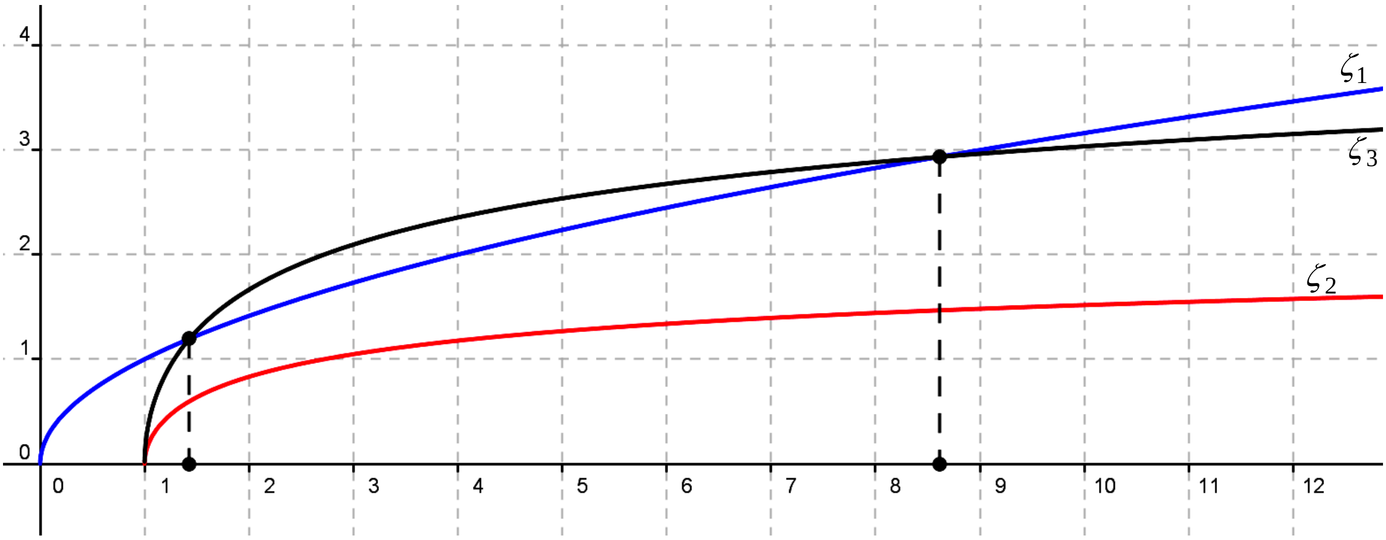
   b- Tracer la courbe ζ_f .

4) Placer les points M et N de ζ_1 et ζ_2 de même abscisse pour lesquels la distance MN est minimale.

5) On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par ζ_f, ζ_2 et les droites $x = a$ et $x = b$.

   A' est l'aire de la partie du plan limitée par ζ_1, ζ_3 et les droites $x = a$ et $x = b$.

   Comparer A et A'.



Exercice N°21:

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthonormé est donnée ci-dessous.

Étude de La fonction *f*

1) ***a.*** Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = x + \ln\left(1 + 2e^{-2x}\right)$.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

c. Étudier la position relative de (C) et de (d).

d. Montrer que la droite Δ d'équation $x = \dfrac{\ln 2}{2}$ est un axe de symétrie de (C)

2) ***a.*** Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} - 2}{e^{2x} + 2}$.

b. Dresser le tableau des variations de la fonction *f*.

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[\dfrac{\ln 2}{2}, +\infty\right[$.

a. Montrer que g réalise une bijection de $\left[\dfrac{\ln 2}{2}, +\infty\right[$ sur $\left[\dfrac{3}{2}\ln 2, +\infty\right[$.

b. On appelle g^{-1} la fonction réciproque de g. Construire (C') la courbe de g^{-1} dans le même repère de (C)

Encadrement d'une intégrale

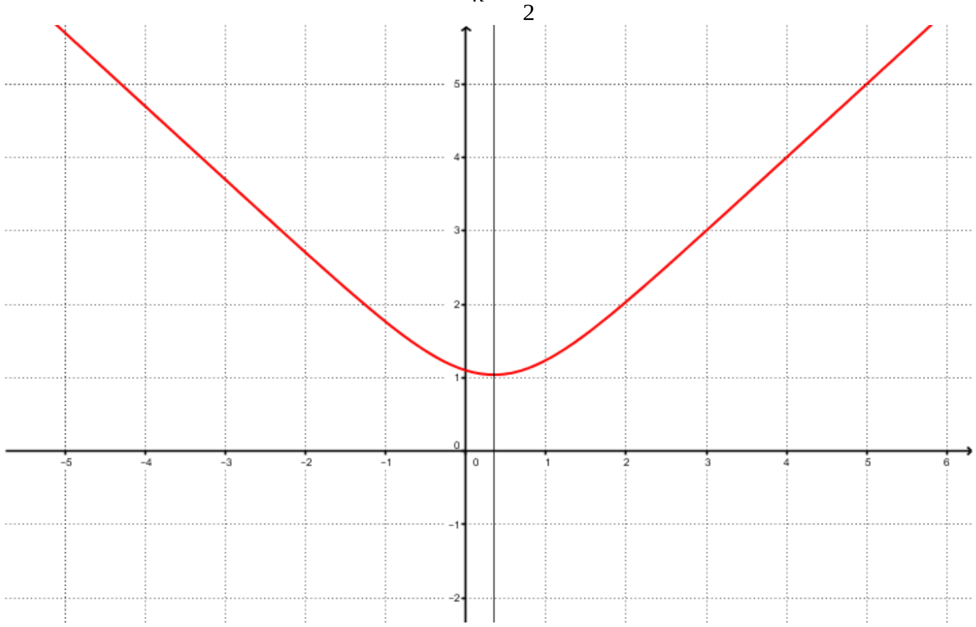
4) On pose $I_n = \int_{\frac{\ln 2}{2}}^{n} [\, f(x) - x \,] dx$, $n \in IN^*$

a. Les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$ définie par $g(x) = \ln(1+x) - x$ sont donnée dans le tableau ci-contre

x	0	$+\infty$
g'(x)	$-$	
g (x)	0 ↘	$-\infty$

Déduire que pour tout réel x , $\ln\left(1+2e^{-2x}\right) \le 2e^{-2x}$

b. Montrer alors que $0 \le I_n \le \frac{1}{2}$ pour tout $n \in IN^*$



Exercice N°22:

On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$ et on désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.(on prendre $2cm$ pour unité graphique)

1) a-Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
   b-Dresser le tableau de variation de f .
   c-Construire (ζ) .
2) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt$.
   - a- Montrer que F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.
   - b- En déduire que pour tout $x \in [0,+\infty[$, $F(x) = \int_0^{x} 2te^{-t}dt$.
3) Soit λ un réel strictement positif. On désigne par $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (ζ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
   - a- A l'aide d'une intégration par parties , calculer $\int_0^{\sqrt{\lambda}} 2te^{-t}dt$.
   - b- Calculer alors $A(\lambda)$ et $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Exercice N°23:

Soient f la fonction définie sur IR par $f(x)=\left(1+x^2\right)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative dan un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=-(x-1)^2 e^{-x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) au point J d'abscisse 0.

b) Soient A et B les points de (C) d'abscisses respectives 1 et 3.

Montrer que A et B sont deux points d'inflexion de (C).

4) Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe :

- (Γ) est la courbe représentative dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ de la fonction g définie sur IR par $g(x)=e^x$.
- E et F sont les points de (Γ) d'abscisses respectives (-1) et $\ln 10-3$.
- G est le point de coordonnées $(0\ ,\ 1-6e^{-3})$.

a) Exprimer $f(1)$ en fonction de $g(-1)$ et $f(3)$ en fonction de $g(-3)$.

b) En remarquant que $10\,g(-3)=g(\ln 10 - 3)$, placer les points A et B dans l'annexe.

5) a) Soit K le point de coordonnées $(\dfrac{11}{2}, 0)$.

Montrer que la droite (BK) est la tangente à la courbe (C) au point B.

b) Tracer la courbe (C) dans l'annexe (On placera les tangentes à (C) en A, en J et en B).

6) Soit S l'aire en (u.a) de la partie E du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations cartésiennes $x=0$ et $x=3$.

a) Hachurer E .

b) Soit F la fonction définie sur IR par $F(x)=-\left(x^2+2x+3\right)e^{-x}$.

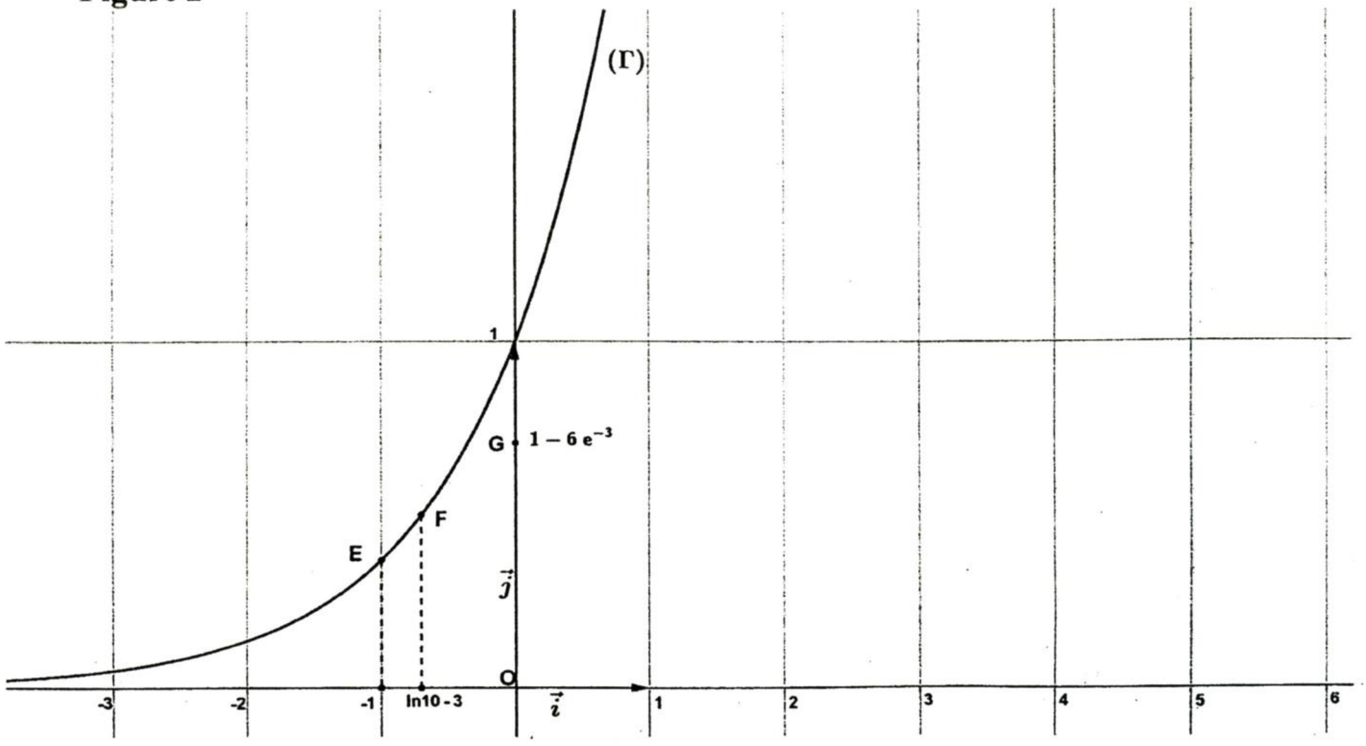
Montrer que F est une primitive de f sur IR.

c) Calculer S.

d) Vérifier que la valeur moyenne de f sur l'intervalle [0,3] est égale à $1-6e^{-3}$.

e) Tracer dans la **figure 2** un rectangle d'aire égale à S.

Figure 2



Révision (2)
Bac 2017

Equation différentielle(7 exercices)

4ème année sciences

Exercice N°1 :

Pour chacune des phrases ci-dessous, une seule des trois propositions est exacte. Cocher la bonne réponse, aucune justification n'est demandée.

1) On considère l'équation différentielle (E) : $y''+4y=0$.

Une solution de (E) est la fonction définie sur IR par :

☐ $f(x)=e^{-4x}$ ☐ $f(x)=\cos(4x)$ ☐ $f(x)=\cos(2x)$

2) On considère l'équation différentielle (E) : $y'-2y=-e^{x}$ .On appelle f la solution de (E) qui s'annule en 0.

a) ☐ $f'(0)=-1$ ☐ $f'(0)=0$ ☐ $f'(0)=1$

b) pour tout $x\in IR$, $f(x)=$

☐ $2\int_0^x f(t)dt-e^x$ ☐ $2\int_0^x f(t)dt-e^x+1$ ☐ $-e^x+1$

Exercice N°2 :

On considère l'équation différentielle $(E): y'-y=\dfrac{-e^x}{x^2}$ et on cherche l'ensemble des solutions de cette équation définies sur $]0;+\infty[$.

1) a – Démontrer que la fonction u définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\dfrac{e^x}{x}$ est solution de (E).

b – Démontrer qu'une fonction v définie sur $]0;+\infty[$ est solution de (E) si et seulement si la fonction : $v-u$, définie sur $]0;+\infty[$, est solution de l'équation différentielle $y'-y=0$.

c – En déduire toutes les solutions définies sur $]0;+\infty[$ de l'équation (E).

Exercice N°3 :

1) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$.

a- Justifier que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(1-\dfrac{1}{2}x\right)$.

b- Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$

c- à laide d'une intégration par parties , Calculer $I(\lambda)=\int_0^{\lambda} f(x)dx$,où $\lambda>0$ puis calculer $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I(\lambda)$

2) On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang.

On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t>0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle $(E): y'+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$.

On considère l'équation différentielle $(E_0): y'+\dfrac{1}{2}y=0$.

a- Vérifier que la fonction f est une solution de l'équation (E).

b- Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction $h = v - f$ est solution de l'équation (E_0).

c- Résoudre l'équation (E_0). En déduire les solutions de l'équation (E).

d- On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle. Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale est la fonction f

3) *a*- Montrer que $f(t) = 0{,}1$ admet une solution unique dans $]7, 8[$

b- On procède a une nouvelle absorption dès que la quantité présente dans le sang devient inférieur à 10%, après combien d'heures cette absorption doit elle avoir lieu ?

Exercice N°4 :

Une ville compte 10 000 habitants. À 8 h du matin, 100 personnes apprennent une nouvelle.
On note $y(t)$ la fréquence des personnes connaissant la rumeur à l'instant t (exprimé en heures).
On choisit 8 h comme instant initial $t = 0$.
La nouvelle se répand dans la ville. la fréquence $y(t)$ vérifie, sur IR_+, l'équation différentielle :
$(E) : y' = 1{,}15y(1 - y)$ avec $y(0) = 0{,}01$.

1) La fonction z est définie par $z = \dfrac{1}{y}$ (y ne s'annule pas).

a- Prouver que z vérifie l'équation : $(E') : z' = -1{,}15z + 1{,}15$.

b- Résoudre l'équation (E').

c- En déduire l'expression de $y(t)$.

2) Soit f la fonction définie sur IR_+ par : $f(t) = \dfrac{1}{1 + 99e^{-1{,}15t}}$

a- Etudier le sens de variation de la fonction f.

b- Quelle est la limite de f en $+\infty$?

3) En remarquant que $y(t) = f(t)$ sur IR_+.

a- Combien de personnes connaissent-elles la nouvelle à midi ?

b- Déterminer au bout de combien de temps, 99% de la population connaîtra la rumeur.

Exercice N°5 :

Une balle de 0,5 kg est lancée verticalement en l'air avec une vitesse initiale de 15m.s^{-1}.
Sur la balle agissent deux forces, celle due à la gravité et celle due à la résistance de l'air, égale à 1/10 de sa vitesse.
On admet que la vitesse v vérifie l'équation différentielle : (E) : $0{,}5v' = -0{,}1v - 5$.

Partie A

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E) dans $[0 ; +\infty[$.

b) En déduire que $v(t) = -50 + 65e^{-0{,}2t}$.

c) Résoudre l'inéquation : $v(t) \geq 0$ sur $[0 ; +\infty[$.

2) Soit h la fonction qui exprime la hauteur de la balle en fonction du temps, on a donc : $h' = v$.

a) Déterminer les primitives de v sur $[0 ; +\infty[$.

b) En déduire l'expression de h.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $f(t) = 325(1 - e^{-0,2t}) - 50t$.

1) Etudier les variations de f (on pourra utiliser le résultat du A-1-c)

2) Démontrer que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\ ;+\infty[$.

Vérifier que $\alpha \in [2,7\ ;\ 2,8]$.(on prendra dans la suite $\alpha \approx 2,75$)

3) En déduire une valeur approchée de la hauteur maximale atteinte par la balle et du temps t_1 que met la balle pour revenir au sol depuis son point le plus haut.

Exercice N°6 :

Le taux d'alcoolémie $f(t)$ (en gL^{-1}) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie, sur IR_+, l'équation différentielle : (E): $y'+y = ae^{-t}$

où t est le temps écoulé après l'ingestion (exprimé en heures), et a une constante qui dépend des conditions expérimentales.

1) On pose, pour tout $t \in IR_+$: $g(t) = f(t)e^{t}$. Démontrer que g est une fonction affine.

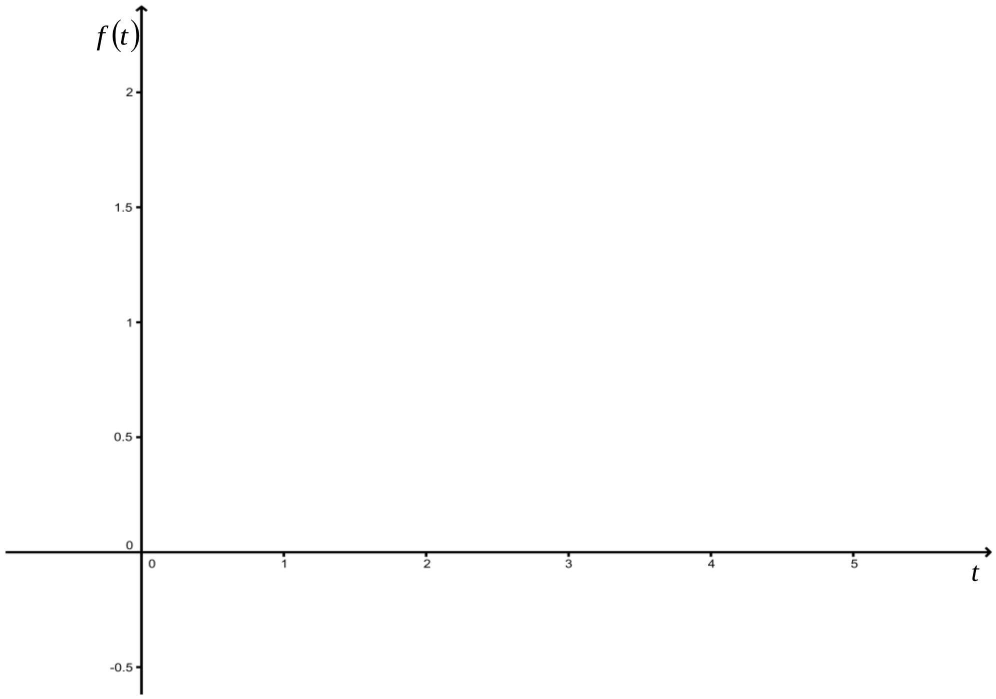
2) Exprimer $f(t)$ en fonction de t et de a.

3) Dans cette question, on suppose que $a = 5$.

a – Étudier les variations de f et tracer sa courbe.

b – Déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.

c – Donner une valeur du délai T (à l'heure près par excès) au bout duquel le taux d'alcoolémie de cette personne est inférieur à 0,5 gL^{-1}.

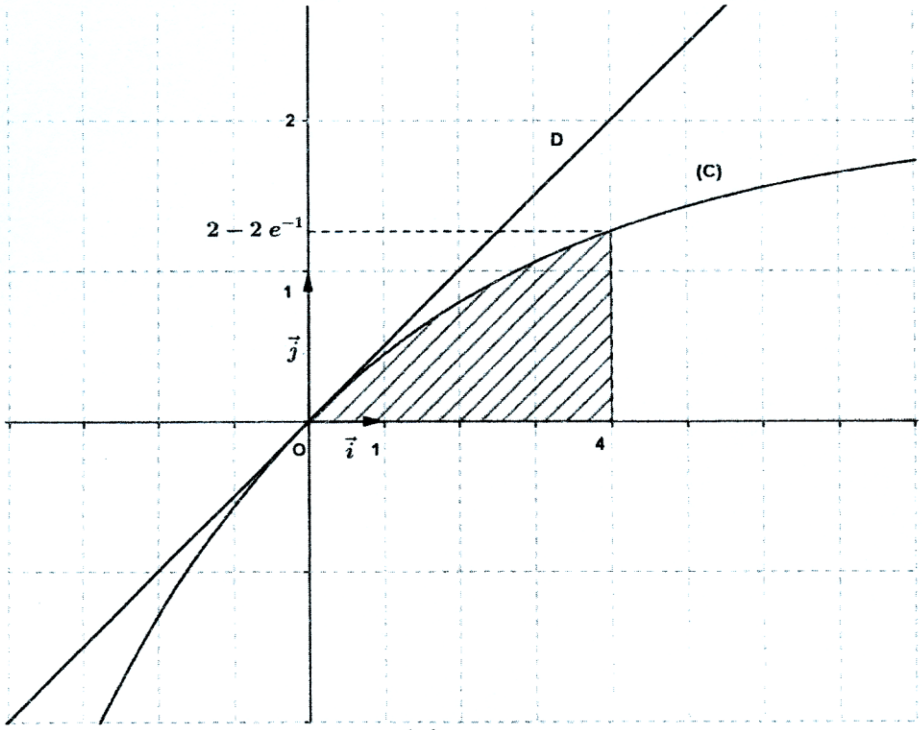


Exercice N°7 :

Dans la figure ci–dessous :

- la courbe (C) est la représentation graphique dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f solution d'une équation différentielle du type $y'=ay+b$ où $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$.
- la droite D est la tangente à (C) au point O.
- $f(4)=2-2e^{-1}$.

On désigne par S l'aire en (u.a) de la partie hachurée et on admet que $S = 8e^{-1}$.



1) a) Par une lecture graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b) En déduire que $b=\dfrac{1}{2}$.

2) a) Justifier que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{a}\left(f'(x)-\dfrac{1}{2}\right)$

b) En déduire que $S=\dfrac{-2\,e^{-1}}{a}$.

c) Montrer alors que $a=-0,25$.

3) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=2-2e^{-0.25x}$.

4) On admet que la restriction de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ modélise l'évolution de la hauteur d'une certaine espèce de maïs. Autrement dit : si on note h(t) la hauteur en mètres de cette espèce de maïs à l'instant t (exprimé en semaines) alors $h(t)=2-2\,e^{-0.25\,t}$.

a) Déterminer la hauteur d'une plante de maïs au bout de trois semaines.

b) Au cours de quelle semaine la hauteur d'une plante de maïs dépassera-t-elle 198 cm ?

Révision (3)
Bac 2017

Probabilités (18 exercices)

$4^{ème}$ année sciences

Exercice N°1 :

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière d'un lycée auprès d'élèves de terminale, on apprend que 60 % des élèves sont des filles. De plus, 5 % des filles et 30 % des garçons fument.
On choisit un élève au hasard. On note : A « l'élève choisi fume »,
F « l'élève choisi est une fille » et G : « l'élève choisi est un garçon ».

1) Déduire de l'énoncé $P(F), P(A/F)$ et $P(A/G)$.
2) Quelle est la probabilité que :
   a- l'élève choisi soit un garçon ?
   b- l'élève choisi soit une fille qui fume ?
   c- l'élève choisi soit un garçon qui fume ?
3) Déduire des questions précédentes la probabilité que l'élève choisie fume.
4) Sachant que l'élève choisie fume, quelle est la probabilité pour qu'il soit un garçon.

Exercice N°2 :

Une entreprise fabrique un article dans deux unités de production notées A et B.
L'unité A, assure 60% de la production.
On a constaté que :

- 3% des pièces provenant de l'unité A présentent un défaut de fabrication.
- 8% des pièces provenant de l'unité B présentent un défaut de fabrication.

On prélève un article au hasard, et on note :

- A l'événement « la pièce provient de l'unité A »
- B l'événement « la pièce provient de l'unité B »
- D l'événement « la pièce présente un défaut », $\bar{D}$ l'événement contraire.

1) Dessiner un arbre
2) Calculer la probabilité qu'un article présente un défaut et provienne de l'unité A.
3) Montrer que la probabilité qu'un article présente un défaut est égale à 0 ,05.
4) On a prélevé une pièce qui présente un défaut, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'unité A ?

Exercice N°3 :

Une usine d'emballage de pommes est approvisionnée par trois producteurs. Le premier producteur fournit 70% de l'approvisionnement de cette usine, le reste étant **également** partagé entre le deuxième producteur et le troisième.
Avant d'être emballées, les pommes sont calibrées par une machine pour trier selon leur diamètre. Les pommes dont le diamètre est conforme aux normes en vigueur sont emballées, les autres, dites « hors calibre », sont rejetées.
Il a été constaté que 20% des pommes fournis par le premier producteur sont hors calibre,
5% des pommes fournis par le deuxième producteur sont hors calibre et
4% des pommes fournis par le troisième producteur sont hors calibre.
Chaque jour les pommes livrées par les différents producteurs sont entreposées dans le même hangar. Pour l'étude du problème qui suit, on convient qu'elles sont bien mélangées.
Un contrôle de qualité sur les pommes est effectué de la manière suivante :
Un contrôleur choisit de manière aléatoire une pomme dans ce hangar, puis mesure son diamètre pour déterminer si elle est de « bon calibre » ou « hors calibre ».

On appellera F_1 l'événement : « la pomme prélevée provient du premier producteur »

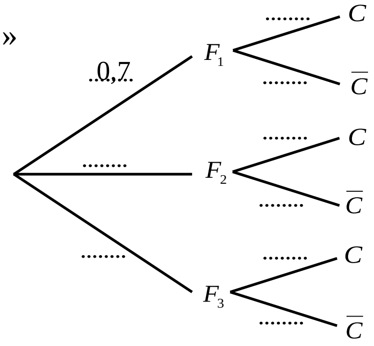
F_2 l'événement : « la pomme prélevée provient du deuxième producteur »

F_3 l'événement : « la pomme prélevée provient du troisième producteur »

C l'événement : « la pomme prélevée a bon calibre »

$\overline{C}$ l'événement : « la pomme prélevée a hors calibre »

1) Déterminer les probabilités des événements F_2 et F_3.
2) Recopier sur votre copie et compléter l'arbre suivant :



3) Justifier que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre et provienne du troisième producteur est $0,144$.
4) Montrer que la probabilité pour que la pomme prélevée ait le bon calibre est : $0,8465$.
5) La pomme mesurée est hors calibre. Le contrôleur affirme :
« Cette pomme provient **très probablement** du premier producteur »
Quel calcul permet de justifier cette affirmation ? Faire ce calcul et conclure.

Exercice N°4 :

Le sang humain est classé en quatre groupes A,B, AB et O ;chaque groupe sanguin est constitué de 2 sous groupes correspondant au rhésus positif Rh+ et rhésus négatifs Rh-

La répartition des principaux groupes sanguins d'une région dont 82.1% des habitants ont le facteur rhésus positif Rh+ est donnée dans les tableaux suivants :

- Les personnes qui ont le facteur rhésus positif Rh+ :

O	A	B	AB
42,6%	46,4%	7,6%	3,4%

- Les personnes qui ont le facteur rhésus négatif Rh-

O	A	B	AB
50.3%	40.2%	6.7%	2.8%

L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée

On note Rh+ l'événement « La personne a le facteur Rh+ ».

On note O l'événement « La personne appartient au groupe O ».

On note A l'événement « La personne appartient au groupe A ».

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront arrondis à 3 décimales.

1°)a. Compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.

b. Quelle est la probabilité que la personne choisie soit du groupe O Rh+ ?

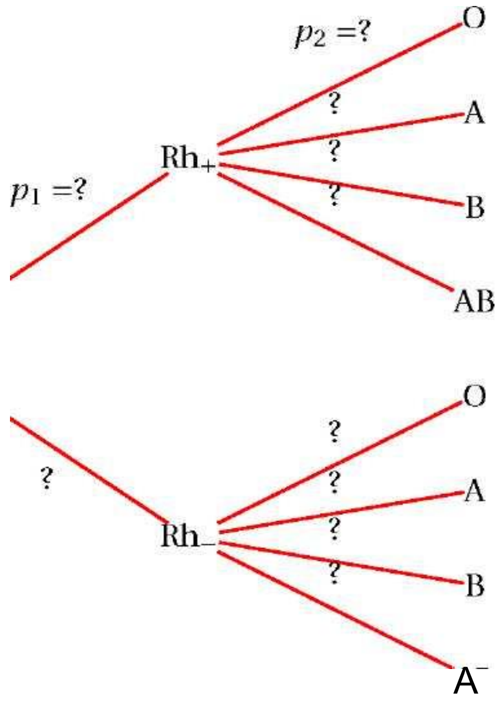
2°) a. Calculer la probabilité de O , vérifier que $p(O) \approx 0.44$

b. déterminer la probabilité de A

c. Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

d. Une personne du groupe A Rh+ ne peut recevoir du sang que d'une personne du groupe A ou O

Quelle est la probabilité que la personne choisie puisse donner son sang à une personne de groupe A Rh+ ?



3°) a. On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée.

Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de personne de groupe O

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O

c) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p_n \geq 0{,}999$.

Exercice N°5 :

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- Pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris.
- Pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins, à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1) Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

On note les évènements suivants :

E_1 « le poisson provient du $1^{ère}$ éleveur » ;

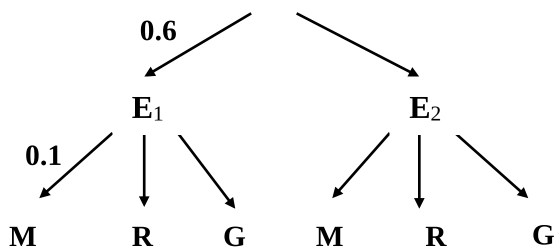
E_2 « le poisson provient du $2^{ème}$ éleveur »

M « un mois plus tard, le poisson n'a pas survécu»

R « le poisson devient rouge à l'âge de trois mois »

G « le poisson devient gris à l'âge de trois mois»

a- Compléter l'arbre suivant :



b- Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.
c- Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.
d- Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2) L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive.
Elle gagne 1 D si le poisson est rouge, 0,25 D s'il est gris et perd 0,10 D s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Exercice N°6:

Un fabriquant de téléviseurs teste ses produits avant de les livrer chez le client. Si le test est positif, il livre le téléviseur au client. Sinon, il essaye de le réparer. Le test est positif pour 70 % des téléviseurs qu'il reçoit, et 65 % des téléviseurs qu'il tente de réparer finissent par fonctionner et être livrés au client. Les autres sont détruits.

On note T l'événement « le test est positif » et C l'événement « le téléviseur est livré au client ». On choisit un téléviseur au hasard sortant de la chaîne de fabrication.

1. Déterminer les probabilités des événements T et C.
2. La fabrication d'un téléviseur coûte 1 000 € au fabricant. Les réparations lui coûtent 50 € de plus. On note a le prix de vente du téléviseur, et X la variable aléatoire égale au gain algébrique réalisé par le fabricant pour l'écran choisi.
   1. **a.** Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
   2. **b.** Exprimer l'espérance de X en fonction de a.

c. À partir de quelle valeur (arrondi à l'euro) l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

Exercice N°7:

Un magasin vend des salons de jardin. Une enquête statistique a montré que :
- 10% des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table ;
- parmi les personnes qui achètent une table, 80% achètent un lot de chaises ;
- parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10% achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin.
On note T l'évènement : « La personne achète une table »
On note C l'évènement : « La personne achète un lot de chaises »

1) *a*– Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.
b– Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à 0,17.
c– La personne a acheté un lot de chaises, quelle est la probabilité qu'elle n'achète pas de table ?

2) On choisit au hasard cinq clients et on suppose qu'ils ont fait leurs choix dans les mêmes conditions et de façon indépendante.
Calculer la probabilité de l'évènement A : « au moins un d'eux, ait acheté un lot de chaises ».

3) À la fin de la journée, le directeur du magasin constate qu'il a réalisé en moyenne un bénéfice de 23,6 DT par personne entrant dans le magasin.

On sait que le directeur a fait un bénéfice de 100 DT par table vendue.

On appelle ***a*** le bénéfice exprimé en dinars qu'il a réalisé par lot de chaises vendues.
<u>On se propose de calculer ***a***.</u>

a. Reproduire et compléter le tableau suivant définissant la loi de probabilité X : « montant du bénéfice réalisé par personne entrant dans le magasin».

Montant du bénéfice $X = x_i$	0	100	$\boldsymbol{a}$	100 + $\boldsymbol{a}$
$P(X = x_i)$				

b. Montrer que l'espérance mathématique de cette loi est égale à : 10 + 0,17$\boldsymbol{a}$

c. Calculer alors $\boldsymbol{a}$.

Exercice N°8:

Un sac contient 9boules : 4 rouges numérotées : $-2;2;2;2$.

5 noires numérotées : $-2;-2;0;2;2$.

Une épreuve E consiste à tirer simultanément deux boules du sac.

1) On considère l'évènement suivant :

a – A : « les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « les deux boules tirées portent le même numéro »

b – Sachant que le deux boules tirées sont de même couleur, quelle est la probabilité pour qu'elles portent le même numéro ?

2) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le produit de deux numéros obtenus.

a – Déterminer la loi de probabilité de X.

b – Calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

3) On répète l'épreuve E, n fois de suite $n \geq 2$.

Soit Y l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de fois où A est réalisé.

a – Calculer en fonction de n la probabilité de $P(\{Y = 1\})$.

b – Montrer que la probabilité pour que A soit réaliser au moins une fois est égale

$P_n = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n$; puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$.

c – Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $P_n \geq 0{,}999$.

Exercice N°9:

Question 1 :

Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.

	Cadres	Employés
Hommes		25
Femmes	8	15

On interroge une personne au hasard ; La probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :

$\frac{2}{15}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{23}$

Question 2

x_i	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,1	0,3

Une loi de probabilité d'espérance E, de variance V et d'écart type σ est définie par le tableau ci-dessus

On a alors : $V = \frac{5}{4}$ $\mu = 2$ $\sigma = \frac{\sqrt{5}}{4}$

Question 3

Soient C et D deux évènements indépendants. On donne $p(C)=\frac{1}{3}$ et $p(D)=\frac{1}{12}$.

On a alors : $p(D\cap C)=\frac{5}{12}$ $\quad$ $p(C\cup D)=\frac{7}{18}$ $\quad$ $p_D(C)=\frac{1}{36}$

Question 4

On lance une pièce de monnaie équilibrée quatre fois de suite.

La probabilité d'obtenir au moins une fois pile est : $\frac{1}{4}$ $\quad$ $\frac{15}{16}$ $\quad$ $\frac{1}{16}$

Exercice N°10:

Si une femme enceinte porte un seul fœtus, on dit qu'elle a une grossesse **unique** sinon on dit qu'elle a une grossesse **multiple**.

Dans une ville, une étude faite sur une population de femmes enceintes montre que

- le pourcentage des femmes ayant une grossesse multiple est de 5%,
- parmi les femmes ayant une grossesse multiple, 55% finissent par accoucher dans le délai prévu,
- parmi les femmes ayant une grossesse unique, 92 % finissent par accoucher dans le délai prévu.

On choisit au hasard une femme de cette population.

On désigne par U et D les évènements suivants :

U : « la femme a une grossesse unique ».

D : « la femme accouche dans le délai prévu ».

1) a) Déterminer p(U)

   b) En utilisant les évènements U et D, traduire en terme de probabilités les pourcentages 92 % et 55 %.

2) a) Calculer p(D) .

   b) Une femme a accouché dans le délai prévu, montrer que la probabilité que sa grossesse soit unique est égale à 0,9694.

3) Le service de maternité de cette ville prévoit qu'en Juillet 2017, n femmes enceintes devraient accoucher dans le délai prévu, ($n\geq 2$).

   On note p_n la probabilité qu'au moins une de ces femmes ait une grossesse multiple.

   a) Exprimer p_n en fonction de n.

   b) Quel est le nombre minimal des femmes qui devront accoucher en Juillet 2017 dans le délai prévu pour que la probabilité p_n soit supérieure à 0,9 ?

Exercice N°11:

Soit D une droite graduée. On désigne par A et B les points de D d'abscisses respectives 2 et 4, on choisie au hasard un point M du segment $[AB]$ et on note x l'abscisse du point M.

1) Quelle est la probabilité que $x \in [2;3]$.
2) Quelle est la probabilité que M soit le milieu du segment $[AB]$.

Exercice N°12 :

1) Soit P une loi de probabilité sur [1 ; 10] de densité f définie par $f(x) = \frac{\lambda}{x^3}$.

a - Déterminer λ.
b - Calculer $P([2;5])$.

2) La durée de vie (en heures) d'un élément mécanique a été modélisée par une variable aléatoire X telle que pour tout réel $t \geq 0$: $P(X < t) = 0{,}002\int_0^t e^{-0{,}002x}dx$

a - Vérifier que la loi de X est une loi exponentielle dont on précisera le paramètre λ.
b - Calculer $P(X < 400)$.
c - Calculer la probabilité que cet élément ait une durée de vie inférieur à 1000 heures sachant qu'il a déjà tenu 500 heures.

Exercice N°13 :

La durée de vie d'un appareil électronique, exprimer en année, jusqu'à ce que survienne la première panne, est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$:la probabilité que l'appareil tombe en panne avant l'instant t est $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

1) déterminer λ pour que la valeur de $P(X > 6)$, soit $0{,}3$.
2) On suppose que $\lambda = 0{,}2$. A quel instant t la probabilité que l'appareil tombe en panne pour la première fois est-elle de $\frac{1}{2}$.

Exercice N°14 :

La durée d'attente en secondes au guichet d'une banque est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $0{,}01$: les propositions suivantes sont elles vraies ou fausse ? Justifier.

1) La densité de probabilité de X est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = e^{-0{,}01t}$.
2) Pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = 1 - e^{-0{,}01t}$
3) La probabilité d'attendre moins de trois minutes à ce guichet est, à 10^{-2} près, égale à $0{,}16$.
4) Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à la caisse soit supérieur à une minute.
5) Le temps moyen d'attente est d'une minute quarante secondes.

Exercice N°15 :

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques.
La durée de vie en **années** d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée T qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda \succ 0$.Tous les résultats seront donnés à 10^{-3}

1°) Sachant que $p(T \succ 10) = 0.286$; Montrer qu'une valeur approchée de λ est 0.125 .

2°) Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3°) Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années.
Quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à dix ans ?

4°) On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils .
Le responsable du laboratoire décide de commander *n* oscilloscopes. Soit X la variable aléatoire qui Prend pour valeur le nombre d'oscilloscopes qui ont une durée de vie supérieure à 10 ans.
a- Déterminer la loi de probabilité de X.
b- Quel est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure à 10 ans

5°) Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un D'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0.999

Exercice N°16 :

Une grande entreprise dispose d'un vaste réseau informatique. On observe le temps de fonctionnement normal séparant deux pannes informatiques. Ce temps sera appelé « temps de fonctionnement ».
Soit X la variable aléatoire égale au temps de fonctionnement du réseau, exprimé en heures.
On admet que X suit une loi exponentielle de paramètre λ . ($\lambda >0$)

1) On sait que la probabilité que le temps de fonctionnement soit inférieur à 7 heures est égale à 0,6.
Montrer qu'une valeur approchée de λ à 10^{-3} près est 0,131.

Dans les questions suivantes, on prendra 0,131 pour valeur approchée de λ et les résultats seront donnés à 10^{-2} près.

2) Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est égale à 0,52.

3) Calculer la probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 9 heures sachant qu'il n'y a pas eu de panne au cours des quatre premières heures.

4) On relève aléatoirement huit temps de fonctionnement, qu'on suppose indépendants.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de relevés correspondant à des temps de fonctionnement supérieurs ou égaux à 5 heures.
a- Quelle est la loi suivie par Y ?
b- Calculer la probabilité que trois temps parmi ces huit soient supérieurs ou égaux à 5 heures.
c- Calculer l'espérance mathématique de Y (on arrondira à l'entier le plus proche).

Exercice N°17 :

Le laboratoire d'un lycée est équipé de 10 microscopes dont 3 sont défectueux.

1) Le laborantin, ne distinguant pas à l'avance les microscopes défectueux des autres, tente de choisir un microscope fonctionnel ; il réalise l'épreuve suivante :
Il choisit un microscope (tous les microscopes ont la même probabilité d'être choisis) et teste sa fonctionnalité.
- Si ce microscope est non défectueux, le laborantin arrête le choix.
- Si le microscope choisi est défectueux, il le met à part et choisit un autre du lot restant jusqu'à ce qu'il obtienne un microscope non défectueux.

Soit A_n l'évènement : « Le premier microscope non défectueux est obtenu au $n^{\text{ième}}$ choix » et p_n sa probabilité.

a) Justifier que $n \leq 4$.

b) Calculer p_1 et p_2.

c) Montrer que $p_3 = \dfrac{7}{120}$ et que $p_4 = \dfrac{1}{120}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à toute épreuve associe le rang du premier microscope non défectueux choisi.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) On suppose dans cette question que la durée de vie d'un microscope (c'est-à-dire la durée de fonctionnement (en année) avant la première panne) est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

a) Soit T un réel positif, on note $p(Y \leq T)$ la probabilité qu'un microscope ait une durée de vie inférieure ou égale à T années. Exprimer $p(Y \leq T)$ en fonction de λ et T.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de λ si l'on sait que $p(Y \geq 5) = 0,7$.

c) On prend $\lambda = 0,071$.
Sachant qu'un microscope n'a pas eu de panne au cours des cinq premières années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure à 10 ans ?

Exercice N°18 :

Un responsable d'un magasin achète des MP_5 auprès de deux fournisseurs F_1 et F_2 dont 25% du fournisseur F_1 . La proportion des MP_5 du deuxième choix est de 2 % chez le fournisseur F_1 et de 4 % chez le second . On considère les événements :

D : " Le MP_5 est du deuxième choix"

F_i : " le MP_5 provient du $i^{\text{ème}}$ fournisseur " $i \in \{1, 2\}$

1) a. Faire un arbre pondéré .

b. Calculer $P(D \cap F_1)$ puis démontrer que $P(D) = 0,035$.

c. Un MP_5 est du deuxième choix.

Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur.

2) Le responsable commande 20 MP_5 , quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient du deuxième choix.

3) Le responsable achète le MP_5 du premier fournisseur à 80 dinars et du second à 72^D et il vent le MP_5 à 125^D s'il est **du premier choix** et à 15^D si non .

On désigne par X la variable aléatoire qui a chaque MP_5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable .

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Calculer l'espérance mathématique de X . Donner une interprétation de ce résultat .

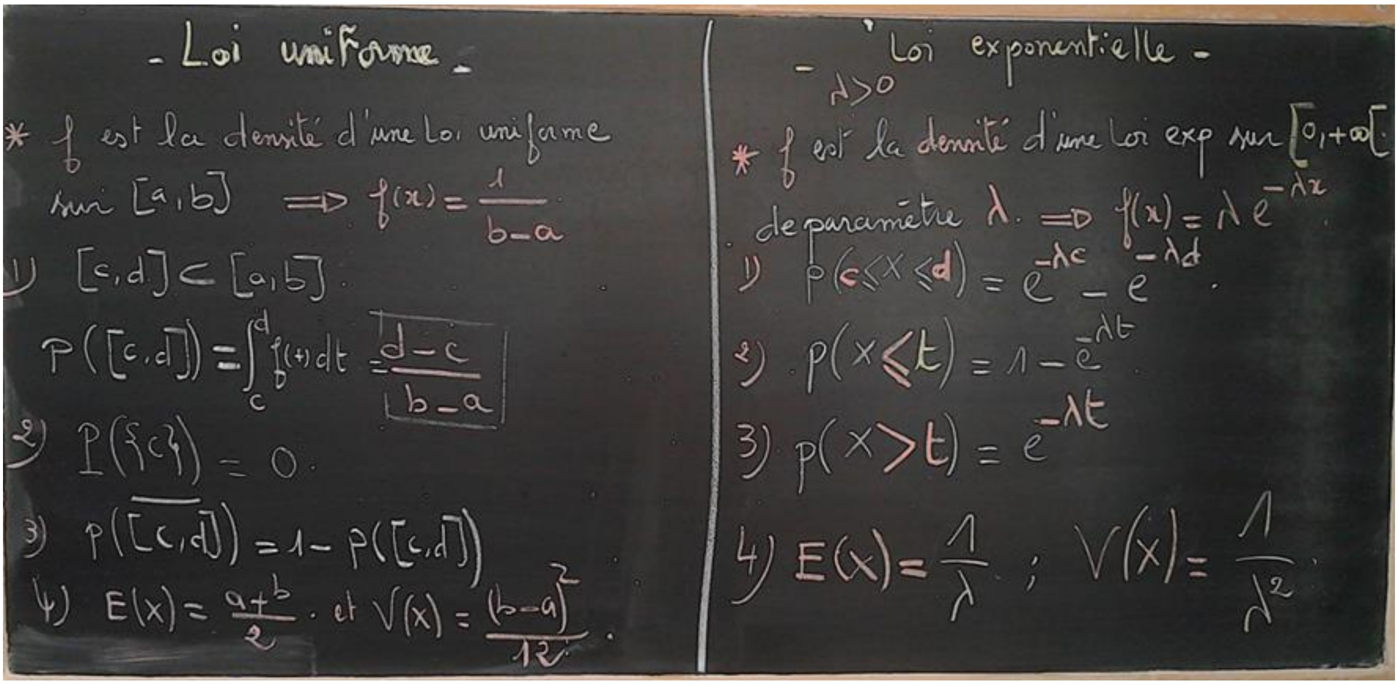
4) La durée de vie en mois d'un MP_5 est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

a. La probabilité qu'un MP_5 dépasse 5 mois de durée de vie est 0, 325. Déterminer λ .

On prend dans la suite $\lambda = 0{,}225$.

b. Quelle est la probabilité qu'un MP_5 dure moins de 8 mois ?

c . Quelle est la probabilité qu'un MP_5 dure au plus 2 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 mois.



Révision (4) Bac 2017

Statistiques - espace - complexes (16 exercices)

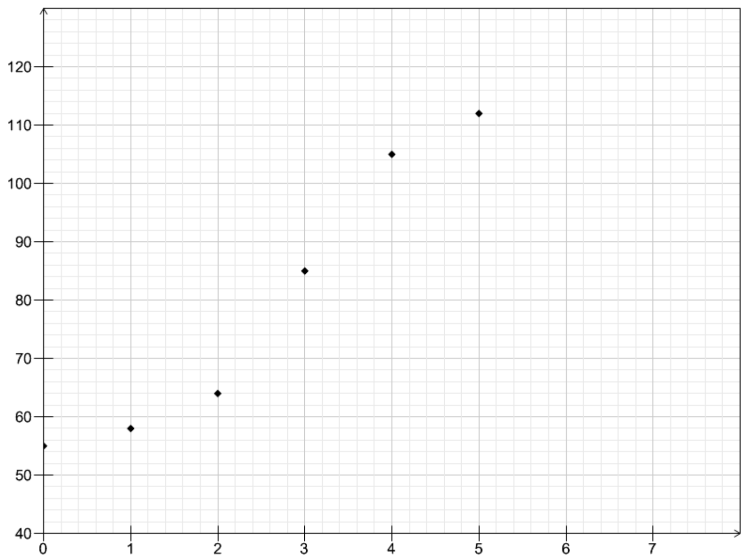
4ème année sciences

Exercice N°1 :

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaires réalisé par une chaîne commerciale :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Chiffre d'affaires en milliers d'euros y_i	55	58	64	85	105	112

on a Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i ; y_i) dans le plan muni d'un repère orthogonal d'unités : 2 cm pour une année en abscisse et 1 cm pour 10 milliers d'euros en ordonnée.



1°) Calculer les coordonnées du point moyen $G(\bar{x} ; \bar{y})$ et le placer sur la figure .

***2°)*a-** Déterminer une équation de la droite de régression D de y en x par la méthode des moindres carrés. On arrondira les coefficients à 10^{-1} près.

b- Tracer cette droite sur le graphique.

c- En supposant que l'évolution constatée se maintienne, estimer le chiffre d'affaires réalisé en 2011.

3°) On décide d'ajuster le nuage de points par la courbe C_f représentant, une fonction f définie sur

$[0,+\infty[$ par $f(x)=ab^x$, où a et b sont deux nombres réels strictement positifs.

a- On impose à la courbe représentative de la fonction f de passer par les points $A(0 ; 55)$ et $B(5 ; 112)$.

Calculer les valeurs exactes de a et b telles que la fonction f vérifie cette condition,

puis donner la valeur approchée arrondie à 10^{-2} près de b.

b- Pour la suite, on considérera que $f(x)=55\times1{,}15^x$ pour tout réel x de l'intervalle $[0,+\infty[$.

Estimer en quelle année le chiffre d'affaires aura dépassé pour la première fois 300 milliers d'euros,

en utilisant successivement les ajustements affine et exponentiel.

Exercice N°2 :

Une machine est achetée 3 000 dinars . le prix de revente y , exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983

1) On pose z = ln(y)
   a) Calculer $\overline{X}$, $\overline{Z}$, et Cov(X,Z)
   b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Z. Que peut-on conclure
   c) Déterminer l'équation de la droite d'ajustement de z en fonction x obtenue par la méthode des moindres carrés.
2) On admet que $z = -0,22x + 8,01$
   a) Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $y = A^x \times B$ où A et B sont réels
   b) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inferieur ou égal à 500 dinars

Exercice N°3 :

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur du textile en France, entre 2000 et 2006.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de milliers d'emplois salariés y_i	118	113	106	98	89	81	75

1) *a* – Représenter le nuage de points associé à la série $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm pour un an en abscisse et 1 cm pour 10 milliers d'emplois salariés en ordonnée, en commençant à la graduation 70.

b – Calculer, les coordonnées du point moyen *G* du nuage et placer ce point sur le graphique.

c – Calculer le coefficient de corrélation linéaire. Interpréter.

2) On pose $z = \ln y$.

a – Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs de z_i au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	4,77						

b – Déterminer une équation de la droite d'ajustement de *z* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés.

c – En déduire une relation entre *y* et *x* de la forme $y = Ae^{Bx}$.

3) En supposant que cet ajustement reste valable pour les années suivantes, donner une estimation du nombre de milliers d'emplois salariés dans le secteur textile en 2010.

Exercice N°4 :

Le tableau ci-dessous donne, pour les années indiquées, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances. On désigne par (X, Y) la série statistique double, où X est le rang de l'année et Y est le taux de mortalité infantile pour 1000 naissances.

Année	1990	1993	1996	1999	2002	2005	2008	2011	2014
Rang x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Taux y_i	37,3	32,3	29,7	24,2	22,1	20,3	18,4	16,4	16,3

Source : INS 03-02-2016

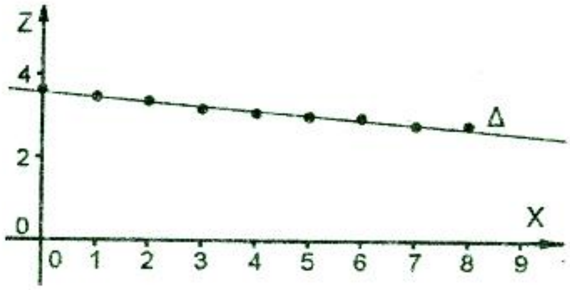
1) a) Déterminer, à 10^{-2} près, le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

b) Ecrire une équation de la droite de régression D de Y en X.
(les coefficients seront arrondis au centième).

c) Utiliser cet ajustement pour estimer le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

2) On pose $Z = \ln(Y)$.

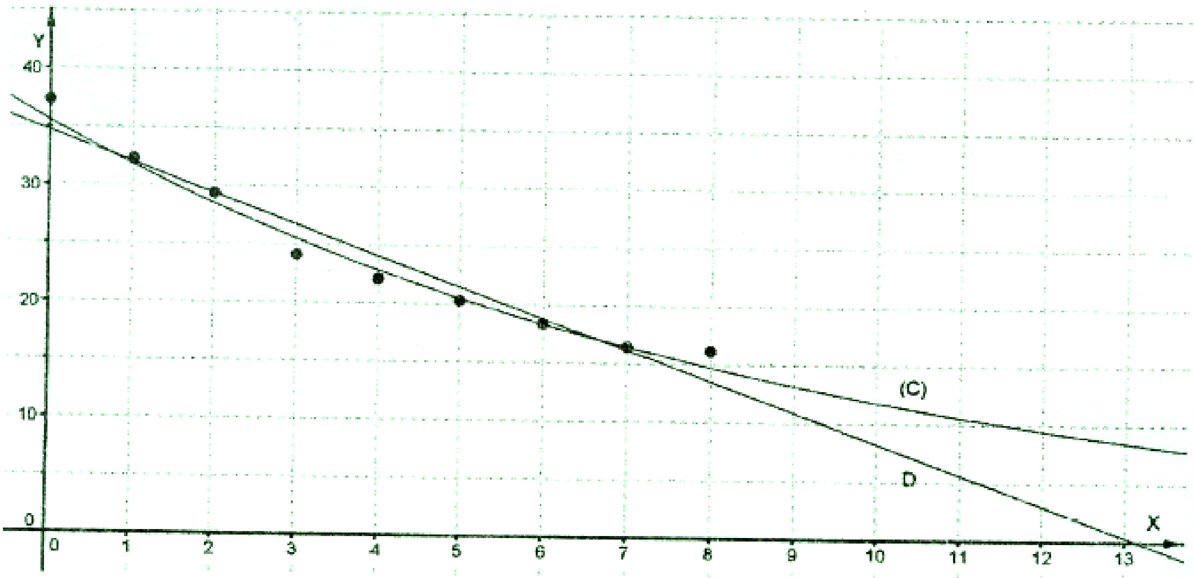
Dans la figure ci-contre, on a représenté le nuage de points de la série statistique (X, Z) et la droite de régression Δ de Z en X dont une équation est $z = -0{,}11x + 3{,}57$.



a) Justifier qu'on peut modéliser le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances par la relation $y = 35{,}52\,e^{-0{,}11x}$.

b) Estimer, à l'aide de cet ajustement, le taux de mortalité infantile en Tunisie pour 1000 naissances en 2020.

3) Dans la figure ci-dessous, on a représenté la droite D définie en 1) b), la courbe (C) d'équation $y = 35{,}52\,e^{-0{,}11x}$ et le nuage de points de la série (X, Y).



Lequel des deux ajustements proposés s'avère le plus adaptable à la situation ?
Justifier la réponse.

Exercice N°5 :

Une étude a été faite sur une population de 22 mouches se reproduisant assez rapidement.
Le tableau suivant donne le nombre N de mouches après un temps T exprimé en jours.

T	0	9	12	18	25	33	39	48	57	66	69	75
N	22	39	105	225	499	791	938	1005	1028	1033	1034	1034

1) Quelle conjecture peut - on émettre sur le nombre de mouches au bout de 85 jours ?

2) On pose $M = \ln\left(\frac{1035}{N} - 1\right)$.

Les valeurs de M, arrondies à 10^{-3} près, sont données dans le tableau suivant :

T	0	9	12	18	25	33	39	48	57	66	69	75
M	3.830	3.240	2.181	1.281	0.072	-1.176	-2.269	-3.512	-4.989	-6.247	-6.941	-6.941

a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire entre T et M .

b) Donner une équation de la droite de regression de M en T. (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).

3) a) Montrer que $N = \frac{1035}{1 + e^{M}}$.

b) Déduire que $N = \frac{1035}{1 + \alpha\, e^{-\beta T}}$, où α et β sont deux réels positifs que l'on déterminera.

4) En utilisant la question 3) b), valider ou réfuter la conjecture émise en 1).

Exercice N°6 :

L'espace (ξ) est rapporté à un repère orthonormé ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

Soient m un paramètre réel et S_m l'ensemble des points M (x , y , z) de (ξ) tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4(m-1)x + 2(m-1)y - 2(m-1)z = 0$$

1) a) *Montrer que pour tout $m \neq 1$, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et de rayon R_m*

b) *Déterminer l'ensemble des points I_m quand m varie dans $IR \setminus \{1\}$.*

2) *Soit le plan P : $2x - y + z = 0$. Montrer que P est tangent à S_m pour tout $m \neq 1$.*

3) S_2 *recoupe les axes , ($O, \vec{i}$), ($O, \vec{j}$) et ($O, \vec{k}$) respectivement en A , B et C distincts de O .*

a) *Montrer que les coordonnées de A sont (4 , 0 , 0) et trouver celles de B et C .*

b) *Montrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne : $x - 2y + 2z - 4 = 0$.*

c) *Déterminer le rayon r du cercle circonscrit au triangle ABC et déterminer son centre Ω .*

Exercice N°7 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(2,0,-1) et B(0,0, -1) , le plan P : x + z -1 = 0 et l'ensemble des points M(x,y,z) d'équations S : $x^2 + y^2 + z^2 -2x +2z +1 =0$.

1) a) Montrer que S est une sphère de centre I(1,0 , -1) et dont on précisera le rayon R.

b) Montrer que A et B sont deux points diamétralement de la sphère S.

2) Montrer que P et S sont sécantes suivants un cercle (C) dont on déterminera le rayon r.

3) Soit $\alpha \in [0,\pi]$. On considère le point M $(1+\cos^2\alpha, \sqrt{2}\cos\alpha\sin\alpha, -\cos^2\alpha)$

a) Vérifier $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ .Que peut on conclure ?

b) Montrer que M appartient au cercle (C).

4) a) Monter que $OM^2 = 1 + 4\cos^2\alpha$

b) Déterminer α pour que OM soit maximale

Exercice N°8:

Partie A :

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1) *Démontrer que, pour tout point M de l'espace,* $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = MI^2 - IA^2$.

2) *En déduire l'ensemble (E) des ponts M de l'espace, tels que* $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B :

Dans l'espace rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, *les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives : A(3,0,0) ; B(0,6,0) ; C(0,0,4) et D(–5,0,1)*

1) *a) Vérifier que le vecteur* $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ *est normal au plan (ABC).*

b) Déterminer une équation du plan (ABC).

2) *a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.*

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d) Démontrer que la point H appartient à l'ensemble (E) définie dans la partie A.

Exercice N°9:

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(4,0,0)$, $B(0,4,0)$ et $C(0,0,4)$.

1) a- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b- Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P dont une équation cartésienne est : $x+y+z-4=0$.

c- Montrer que l'aire du triangle ABC est égale à $8\sqrt{3}$.

2) Soit le point $G(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$.

a- Montrer que le point G est le centre de gravité du triangle ABC.

b- Montrer que $[OG]$ est la hauteur issue de O du tétraèdre OABC.

3) On donne les points I, J et K milieux respectifs des segments $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$

a- Justifier que $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ et que $\overrightarrow{KI}\wedge\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b- En déduire l'aire du triangle IJK.

4) On désigne respectivement par V et V' les volumes des tétraèdres OABC et OIJK.

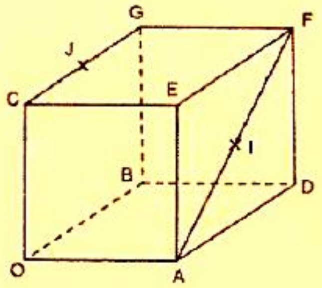
Montrer que $V'=\frac{1}{4}V$.

Exercice N°10:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

Soit OADBCEFG le cube tel que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments [AF] et [CG].



1) a) Déterminer les coordonnées des points E, I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{OI}\wedge\overrightarrow{OJ}=\frac{1}{4}(\vec{u}-4\vec{v}+2\vec{w})$.

2) a) Calculer l'aire du triangle OIJ.

b) Calculer le volume du tétraèdre OIJE.

c) La droite passant par E et perpendiculaire au plan (OIJ) coupe le plan (OIJ) en un point H.

Sans calculer les cordonnées de H, justifier que $EH=\frac{\sqrt{21}}{7}$.

3) Soit (S) l'ensemble des points M(x, y, z) de l'espace tels que $x^2+y^2+z^2-2x-2z+\frac{11}{7}=0$.

Montrer que (S) est une sphère tangente au plan (OIJ).

Exercice N°11:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(–1, 1 , 0) , B(1 , 2 , 0) et C(1 , 5 , 3)

1)

a) Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P
b) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du triangle ABC
c) Montrer que OABC est un tétraèdre et calculer son volume
d) Déduire d(O, P)
e) Déterminer une équation cartésienne de P et vérifier que le point G(–1 , 0 ,–1) appartient au plan P

2) Soit Q le plan passant par O et parallèle au plan P et $\Delta:\begin{cases} x=-1+2\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$; $\alpha\in\mathbb{R}$

Vérifier que Δ et P sont sécants en A

3) Soient S la sphère de centre O et tangente à P et S' la sphère de centre O' tel que : $\overrightarrow{GO'}=2\overrightarrow{GO}$ et de rayon $R'=2R$.

a) Déterminer les coordonnées du point H de contact entre S et P

b) Montrer que P est tangent à S'

4) A tout réel m on associe le plan $P_m : x+2(1-m)y+mz+1+m=0$

a) Vérifier que pour tout réel m ; $G\in P_m$ et que P est l'un des plans P_m

b) Etudier suivant les valeurs de m , $S\cap P_m$ et déduire $S'\cap P_m$

Exercice N°12:

Répondre par **Vrai** ou **Faux** . en justifiant la réponse.

1) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit l'équation $(E): z^2-(e^{i\theta}+e^{-i\theta})z+1=0$, z' et z'' sont les solutions de l'équation (E)

M' et M'' sont les images respectives de z' et z''. Soit I le milieu de $[M'M'']$

a- Alors I appartient à la droite $(O,\vec{u})$.

b- z' et z'' sont inverses .

c- Soit Δ le discriminant de (E)

alors $\delta=e^{i\theta}-e^{-i\theta}$ est une racine carrée de Δ.

2) $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une racine sixième de -8 .

3) Soit f une fonction dérivable sur $[1,4]$ telle que $|f'(x)|\le 5$ pour $x\in[1,4]$ alors: $|f(4)-f(1)|\le 20$.

4) Soit g une fonction continue sur $\left[1,\frac{1}{2}\right]$ et dérivable sur $\left]1,\frac{1}{2}\right[$ tel que $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(0)=0$

alors la courbe représentative de g admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses

Exercice N°13:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A le point d'affixe $a=1+i\sqrt{3}$ et B le point d'affixe $b=(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$.

1) *a*-Vérifier que $\frac{b-a}{a}=i$, en déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A.

b- Donner l'écriture exponentielle de a puis construire les points A et B. (**page annexe**)

2) Soit $\theta\in\left]0,2\pi\right[$.On considère les points A' et B' d'affixes respectives $a'=ae^{i\theta}$ et $b'=be^{i\theta}$.

a- Montrer que $OB=OB'$ et que $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}})\equiv\theta[2\pi]$

b- Dans cette question, on prend $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Construire le point B' et placer le point A'.

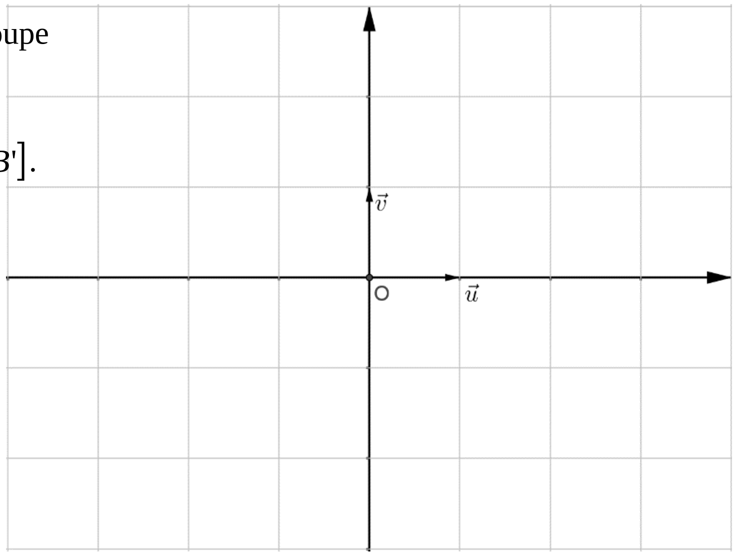
3) On se propose de montrer que la droite (AA') coupe le segment $[BB']$ en son milieu.

Soit P le milieu de $[AA']$ et Q le milieu de $[BB']$.

a- Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{PQ})}{Aff(\overrightarrow{AA'})} = \left(\frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1}\right)\left(\frac{1}{2}i\right)$.

b- Montrer que $e^{i\theta} - 1 = 2iSin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et que $e^{i\theta}+1 = 2Cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

c- Conclure.



Exercice N°14 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). z est un nombre complexe non nul.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\frac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$.

L'affixe de I est donc $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.

1) *a*- Donner une relation entre les modules de z et z'. Donner une relation entre leurs argument

b- Sur la figure jointe est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2. Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M_1', puis le point I, milieu du segment $[M_1M_1']$. Effectuer cette construction.

2) Pour cette question, **θ** est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.

a- Montrer que l'affixe de I est: $z_I = i\sin\theta$.

b- Sur la figure jointe est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle (C) de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant question **2)** *a*- on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2M_2']$. Effectuer cette construction.

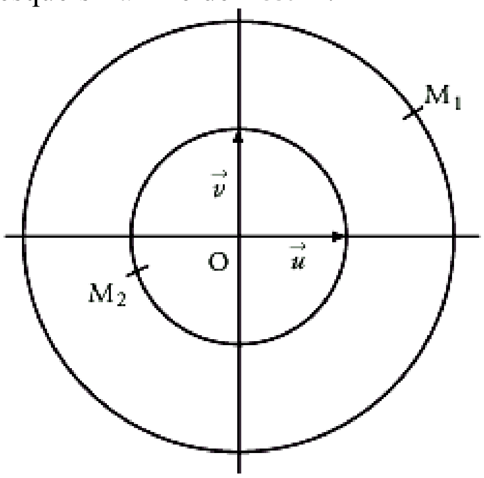
c- Donner l'ensemble décrit par *I* lorsque M décrit (C).

3) Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.

a- Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 4iz - 1 = 0$

c- En déduire les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de *I* est $2i$.



Exercice N°15 :

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) suivante : $z^2 - z(1+e^{i\theta}) + e^{i\theta} = 0$, $\theta \in]0,\pi[$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit A le point d'affixe 1. On appelle f l'application du plan dans lui-même qui, a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z'=1-z^2$

a) Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, Donner une interprétation géométrique de Arg $\left(\frac{z'-1}{z-1}\right)$

b) En déduire que les points A,M et M' ($A \neq M$ et $A \neq M'$) sont alignés si et seulement si $\frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}^*$

3) Dans cette question, on prend $z = e^{i\theta}$, $\theta \in]0,\pi[$

a) Montrer que M'appartient à un cercle de centre A dont on précisera le rayon.

b) Déterminer la forme exponentielle de z',en déduire que $\frac{z'}{z} = 2\sin\theta\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

c) Que peut-on dire du triangle OMM' ?

d) Soit M un point du cercle (C) de centre O et de rayon 1 ; Expliquer comment obtenir géométriquement le point M' à partir de M. effectuer cette construction.

e) Pour quelle valeur de θ les points A,M et M' sont alignés ?

Exercice N°16 :

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-i$ et l'application f de $P \backslash \{O\}$ vers P qui a pour tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z^2-1}{2z}$.

1) a – Déterminer les points fixes par f.
b – Montrer que z' est imaginaire <u>si et seulement si</u> , M', A et B sont alignés.
c – Montrer que si $z' \neq i$ alors $\frac{z'+i}{z'-i} = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2$.
d – En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est imaginaire.

2) Soit $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a – Soit le point C d'affixe $(i\sin\theta)$, déterminer, sous forme exponentielle, les affixes des points M_1 et M_2 antécédents de C par f.
b – Montrer que A, B, M_1 et M_2 sont situés sur un même cercle que l'on précisera.

3) Soit l'équation $(E): z^2 - (1+i)(m+1)z + i(m^2+1) = 0$, $m \in \mathbb{C}$.
a – Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).
b – On désigne par $N_1(m+i)$ et $N_2(im+1)$.

Montrer que $I\ N_1\ N_2$ est un triangle rectangle et isocèle en I. tel que $I(1+i)$