Statistiques

La cote d'une voiture d'occasion est donnée dans le tableau suivant :

Année de mise en circulation	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5
Cote y_i en €	4100	4500	5100	5800	6700

1) Le plan est muni d'un repère orthogonal. Les unités graphiques sont en abscisses : 2 cm pour un an, en ordonnées : 1 cm pour 1000 €. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$

2) Les points n'étant pas parfaitement alignés, on pose $z = \ln y$

a) Recopier et compléter le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5
z_i					

Les valeurs de z_i seront données sous forme décimale approchée à 10^{-3} près par défaut

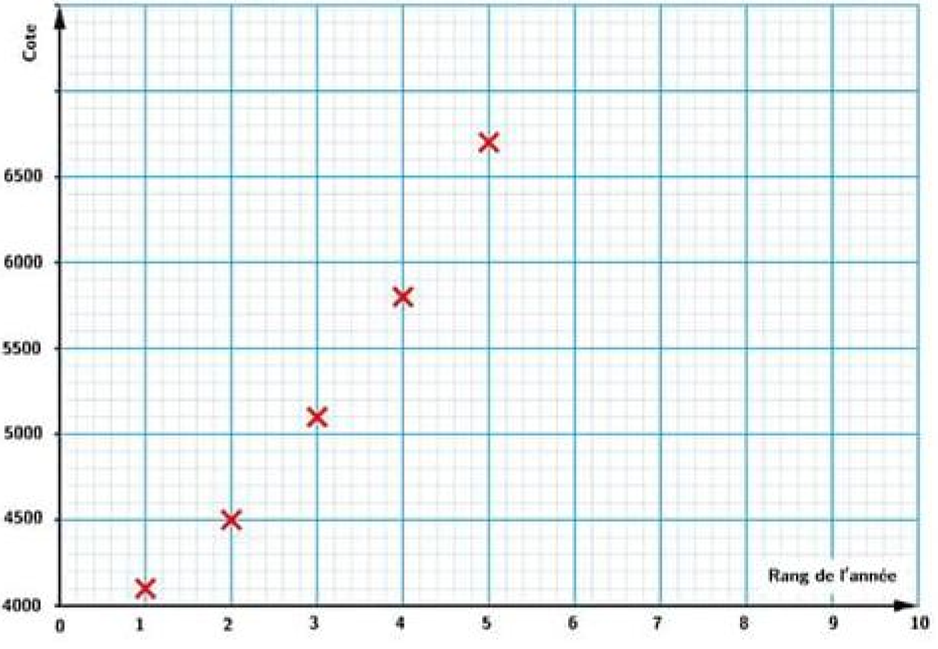
b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z. Un ajustement affine est-il justifié ?

c) Donner une équation de la droite de régression D et z en x

d) Calculer la valeur de z donnée par l'équation précédente pour l'année 2010. En déduire une estimation de la cote de cette voiture de l'année 2010. (On donnera une valeur arrondie à 100 € près)

correction

1)



2) a)

x_i	1	2	3	4	5
z_i	8.32	8.41	8.54	8.67	8.81

b) $\bar{x} = 3$, $\bar{z} = 8.549$, $V(x) = 2$, $\sigma_x = 1.414$, $V(z) = 0.031$, $\sigma_z = 0.176$ et $\text{cov}(x,z) = 0.247$

Le coefficient de corrélation de z en x est :

$$r = \frac{\text{cov}(x,y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0.247}{1.414 \times 0.176} = 0.993$$

Le coefficient de corrélation est très proche de 1 donc un ajustement affine est largement justifié.

c) Une équation de la droite de régression de x en z est $z = ax + b$ avec $a = \frac{\text{cov}(x,z)}{V(x)} = \frac{0.247}{2} = 0.124$ et

$b = \bar{z} - a\bar{x} = 8.549 - 0.124 \times 3 = 8.177$

$$\boxed{z = 0.124x + 8.177}$$

d) En 2010, $x = 8$ donc $z = 0.124 \times 8 + 8.177 = 9.169$

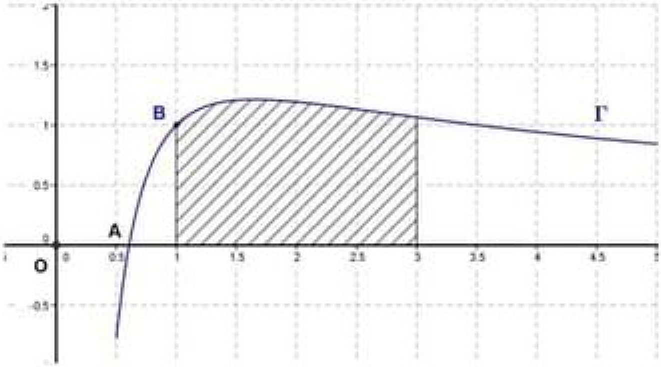
La cote y de cette voiture en 2010 est donc tel que $\ln y = 9.169$ c'est à dire $y = e^{9.169} = 9600$ €

Exercice

On considère la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$, et telle que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0{,}5\,;5]$, on a :

$$g(x)=\frac{2\ln(x)+1}{x}.$$

On note g' sa fonction dérivée et Γ sa courbe représentative dans le repère ci-dessous.
Soit B le point de Γ d'abscisse 1 ; la droite (OB) est la tangente en B à la courbe Γ.



1. Déterminer les coordonnées exactes du point A, point d'intersection de la courbe Γ avec l'axe des abscisses.

2.a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0{,}5\,;5]$, on a $g'(x)=\frac{1-2\ln(x)}{x^2}$.

b. Etudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$.

c. En déduire les variations de g sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$.

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe Γ au point B d'abscisse 1.

4.a. On note $\mathscr{D}$ le domaine défini par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équations $x=1$ et $x=3$.
Par lecture graphique, encadrer par deux entiers l'aire de $\mathscr{D}$, exprimée en unités d'aire.

b. On définit la fonction G sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$, par :

$$\mathrm{G}(x)=\ln(x)[\ln(x)+1].$$

c. Déterminer l'aire de $\mathscr{D}$ exprimée en unités d'aire.

CORRECTION

1. L'abscisse du point A et la solution de l'équation $g(x)=0$. (On doit obtenir un nombre appartenant à l'intervalle $[0,5;5]$.)

$g(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln(x)+1=0 \Leftrightarrow \ln(x)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

On obtient en utilisant la calculette :

$e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}=0{,}607$ à 10^{-3} près

donc $0{,}5 \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}} \leqslant 5$

<u>conclusion :</u>

Les coordonnées exactes du point A sont : $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};0\right)$

2.a. On rappelle que :

$(\ln(x))'=\frac{1}{x}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$

$u(x)=2\ln(x)+1 \qquad u'(x)=\frac{2}{x}$

$v(x)=x \qquad v'(x)=1$

$$g'(x)=\frac{x\times\frac{2}{x}-(2\ln(x)+1)\times 1}{x^2}=\frac{1-2\ln(x)}{x^2}$$

b. Le signe de $g'(x)$ est le signe de $1-2\ln(x)$ sur l'intervalle $[0,5;5]$.

$1-2\ln(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\geqslant \ln(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}}\geqslant \ln(x) \Leftrightarrow \sqrt{e}\geqslant \ln(x)$

$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}=1{,}649$ à 10^{-3} près

ON donne le signe de $g'(x)$ sous la forme d'untableau

x	0.5		$\sqrt{e}$		5
g '(x)		+	0	-	

c. La fonction g est croissante sur $[0,5;\sqrt{e}]$ et décroissante sur $[\sqrt{e};5]$

$g(\sqrt{e})=\frac{2}{\sqrt{e}}=1{,}214$ à 10^{-3} près

<u>remarque :</u>

On ne demande pas le tableau de g donc il n'est pas nécessaire de calculer une valeur approchée de $g(0{,}5)$ et de $g(5)$.

3. $g(1)=1$ car $\ln(1)=0$ donc $B(1;1)$.

La tangente à la courbe Γ au point B est la droite (OB) (résultat donné par l'énoncé).

$O(0;0)$ et $A(1;1)$

Le coefficient directeur de (OB) est : $\frac{1-0}{1-0}=1$.

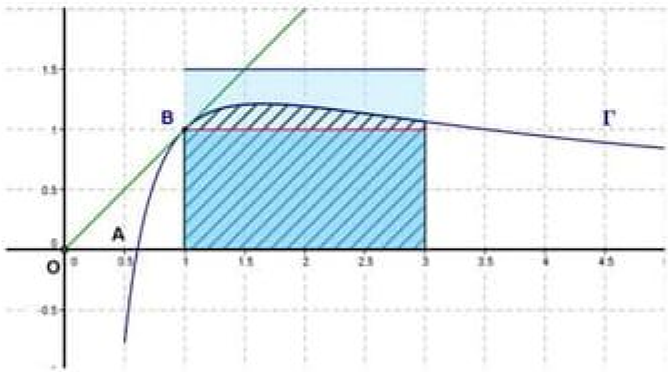
La droite passe par l'origine donc l'ordonnée à l'origine est égale à 0.

L'équation de (OB) est donc : $y=x$.

Remarque :

On peut aussi utiliser le nombre dérivé : $g'(1)$.

4.a.



Les aires sont exprimées en unités d'aire

$\mathscr{D}$ est la partie, de plan, hachurée sur le dessin

$\mathscr{D}$ contient un rectangle de longueur : 2 et de largeur : 1 donc l'aire de $\mathscr{D}$ est supérieure à $2\times1=2$

$\mathscr{D}$ est contenu dans un rectangle de longueur : 2 et de largeur : 1,5 donc l'aire de $\mathscr{D}$ est inférieure à $2\times1{,}5=3$

conséquence :

L'aire de $\mathscr{D}$ est comprise entre 2 et 3.

b. Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0{,}5;5]$

$u(x)=\ln(x)\qquad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v(x)=\ln(x)+1\qquad v'(x)=\frac{1}{x}$

$\mathrm{G}(x)=u(x)\times v(x)$

G est dérivable sur $[0{,}5;5]$ et

$\mathrm{G}'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$

$\mathrm{G}'(x)=\frac{1}{x}\times(\ln(x)+1)+(\ln(x))\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln(x)+1}{x}=g(x)$

G est une primitive de g sur $[0{,}5;5]$.

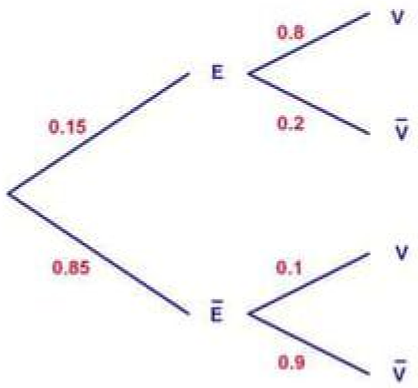
c. g est positive sur l'intervalle $[1;3]$ donc l'aire de $\mathscr{D}$ en unités d'aire est :

$$\int_1^3 g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{G}(3)-\mathrm{G}(1)$$

$\mathrm{G}(1)=0$ et $\mathrm{G}(3)=\ln(3)[\ln(3)+1]$

L'aire de $\mathscr{D}$ est : $\mathrm{G}(3)=2{,}306$ à 10^{-3} près.

2. On obtient l'arbre pondéré :



3. $E \cap V$ est l'événement : « le sac de pommes acheté est un sac vendu directement dans l'exploitation $\boxed{\textbf{et}}$ contient des variétés différentes ».
En utilisant l'arbre pondéré ou la définition d'une probabilité conditionnelle, on obtient :
$P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0,15 \times 0,8 = 0,12$

4. En utilisant l'arbre pondéré ou la formule des probabilités totales, on obtient :
$P(V) = P(E \cap V) + P(\bar{E} \cap V) = 0,12 + P(\bar{E}) \times P_{\bar{E}}(V) = 0,12 + 0,85 \times 0,1 = 0,12 + 0,085$
$P(V) = 0,205.$

5. On nous demande de calculer $P_{\bar{V}}(E)$
$P_{\bar{V}}(E) = \dfrac{P(E \cap \bar{V})}{P(\bar{V})}$
$P(\bar{V}) = 1 - 0,205 = 0,795$
$P(E \cap \bar{V}) = 0,15 \times 0,2 = 0,03$
$P_{\bar{V}}(e) = \dfrac{0,03}{0,795} = \dfrac{30}{795}$
$P_{\bar{V}}(E) = 0,038$

6. Soit X la variable aléatoire égale au prix de ventes des sacs de pommes.

$P(X = 0,80) = P(E) = 0,15$
$P(X = 3,40) = P(\bar{E}) = 0,85$
On donne la loi de probabilité de X sous la forme d'un tableau.

X	0.80	3.40
$P(X=x_i)$	0.15	0.85

$E(X) = 0,80 \times 0,15 + 3,40 \times 0,85 = 0,12 + 2,89 = 3,01$
Le prix moyen de vente d'un sac de pommes est : 3,01€.
Le montant total des ventes que l'on peut prévoir est : $45000 \times 3,01$ = 13 540€.