

Le sujet comporte quatre exercices répartis en trois pages

EXERCICE 1 : (4 points)

En vue de comprendre le phénomène de refroidissement d'un liquide après son ébullition, on relève, durant une heure et toutes les cinq minutes, la température T de ce liquide.

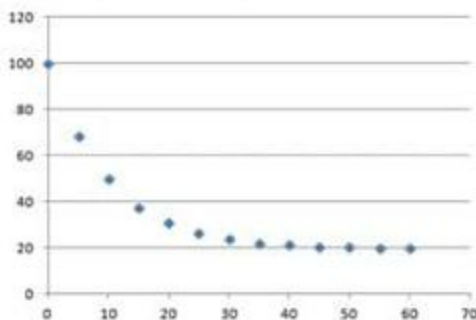
Le tableau ci-dessous donne les résultats recensés pour une tasse de café servie dans un salon dont la température ambiante est de 20°C .

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
T en $^{\circ}\text{C}$	100	68.5	50	37.5	31	26.5	24	22	21.5	20.9	20.5	20.3	20.2

Le nuage de points associé à la série statistique (t, T) est représenté ci-contre :
Ce nuage permet d'envisager **un ajustement de type exponentiel**.

On pose $\theta = \ln(T - 20)$

Les valeurs de θ , seront arrondies à 10^{-2} près.



1) Recopier sur votre copie et compléter le tableau suivant :

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.86			1.39		0.41	-0.11			-1.61

2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r (arrondi à 10^{-4} près) de la série statistique (t, θ) .

b) Un ajustement affine de θ en t par les moindres carrés est-il alors possible ? Justifier.

3) Donner une équation cartésienne de la droite de régression D de θ en t .

4) En déduire que l'expression de T en fonction de t est de la forme $T = 20 + a \cdot e^{\beta t}$ où a et β sont deux réels dont on donnera les valeurs arrondies à 0,1 près.

▲ Dans la suite, tout résultat doit être arrondi à l'unité.

5) a) Estimer la température de cette tasse de café après 90 minutes de sa préparation.

b) Après combien de temps la température de cette tasse atteint 28°C ? Expliquer.

EXERCICE 2 : (6 points)

Une entreprise fabrique des chemises en très grande série. Une chemise peut présenter deux types de défauts :

- Un défaut de finition avec une probabilité de 0,03.
- Un défaut de couleur avec une probabilité de 0,02.
- La probabilité qu'une chemise ait les deux défauts à la fois est de 0,01.

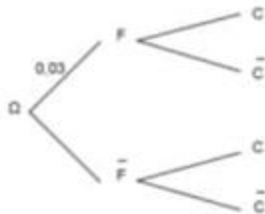
On considère les événements :

F : « La chemise présente un défaut de finition »

C : « La chemise présente un défaut de couleur »

A : « La chemise ne présente aucun défaut »

On peut modéliser ces données par l'arbre de probabilités ci-contre :



I/ 1) a) Donner la valeur de $p(C \cap F)$.

b) En déduire que $p(C \cap \bar{F}) = 0,01$

2) a) On sait que la chemise présente un défaut de finition. Montrer que la probabilité qu'elle ait un défaut de couleur est égale à $\frac{1}{3}$.

b) En déduire la probabilité que la chemise ait seulement un défaut de finition.

3) Montrer que la probabilité que la chemise ait un unique défaut est de 0,03.

4) Montrer que $p(A) = 0,96$

5) On considère un lot de 10 chemises emballées de cette entreprise. Un contrôle s'effectue sur l'état de chaque article de ce lot de façon indépendante. Soit X le nombre de chemises dans ce lot n'ayant aucun défaut. Calculer la probabilité (arrondi à 10^{-2} près) que 9 chemises de ce lot ne présentent aucun défaut.

II/ Une chemise (de cette entreprise) sans défaut est vendue à 40 DT. Son prix décroît à 30 DT si elle présente un seul défaut. Elle sera vendue à 20 DT si elle présente les deux défauts. Soit Y la variable aléatoire qui à chaque chemise associe son prix de vente.

1) Déterminer la loi de probabilité de Y.

2) Calculer le prix moyen d'une chemise.

III/ Dans cette entreprise on se sert de 10 machines identiques dans la fabrication des chemises. Chacune de ces machines a une durée de vie T (exprimée en années) qui suit une loi de probabilité exponentielle p de paramètre λ telle que $p(T > 5) = 0,2$.

1) Montrer que $\lambda = \frac{\ln 5}{5}$

▲ Dans la suite, toute probabilité demandée doit être arrondi à 10^{-2} près.

2) Quelle est la probabilité qu'une machine n'est plus fonctionnelle après 3 années.

3) Quelle est la probabilité qu'une machine fonctionnait une année et pouvait tomber en panne au cours des deux années suivantes.

4) Une machine a fonctionné une année. Calculer la probabilité qu'elle fonctionnait encore 2 années de plus.

EXERCICE 3 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie sans justifier, le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.

1) L'équation (E) : $21x+7y=25$ admet dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

- a) une infinité de solutions. b) une seule solution. c) zéro solutions.

2) Pour tout entier non nul n , PGCD($2n, 2n+1$) est égal à :

- a) 1 b) $2n$ c) $2n+1$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = 1 + 3^{2n}$. Le reste de la division euclidienne de A par 4 est égal à :

- a) 0 b) 1 c) 2

EXERCICE 4 : (7 points)

A/ Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, (Γ) est la courbe de la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{ax}{x-1} + b \ln(x-1)$ et la droite Δ est d'équation $y = x$.

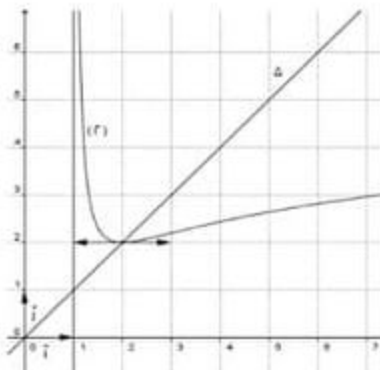
L'unique tangente horizontale à (Γ) est au point $A(2,2)$.

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
2) En se servant des valeurs graphiques de $g(2)$ et $g'(2)$, montrer que : $a=b=1$

3) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = e$

(on peut remarquer que $\frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$)

- b) Calculer (en unité d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par (Γ) , Δ et les droites d'équation $x=2$ et $x=e+1$



B/ Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x-1)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Montrer que pour tout réel x de $]1, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.
2) Dresser le tableau de variation de f .
3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
4) Montrer que le point $A(2,0)$ est un point d'inflexion de (C) .
5) Tracer la courbe (C) .

C/ Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1) dx$

- 1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1 .
b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$
c) Calculer le terme I_1 .
2) a) Montrer que pour tout réel x de $[2, e]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n}$

EXERCICE 1 : (4 points)

1)

t en minutes	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4.38	3.88	3.40	2.86	2,4	1,87	1.39	0,69	0.41	-0.11	-0,69	-1,2	-1.61

2) a) $r = \frac{\text{Cov}(t, \theta)}{\sigma(t) \cdot \sigma(\theta)} \cong 0,9996$

b) Oui il est possible de faire un ajustement affine de θ en t , par les moindres carrés.
En effet $0,75 \leq |r| < 1$.

3) D : $\theta = a \cdot t + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V(t)} \cong -0,1$ et $b = \bar{\theta} - a \cdot \bar{t} \cong 4,38$. Donc D : $\theta = -0,1 \cdot t + 4,38$

4) On a : $\theta = \ln(T-20)$ cela équivaut à : $T = 20 + e^{\theta}$
équivaut à : $T = 20 + e^{-0,1t + 4,38}$
équivaut à : $T = 20 + e^{4,38} \cdot e^{-0,1t}$ D'où : $T = 20 + 79,8 \cdot e^{-0,1t}$

5) a) Pour $t = 90$ mn on a : $T = 20 + 79,8 \cdot e^{-0,1 \times 90} \cong 20^{\circ}\text{C}$

b) $T = 20 + 79,8 \cdot e^{-0,1t} = 28$ équivaut à : $e^{-0,1t} = \frac{8}{79,8}$
équivaut à : $t = -10 \times \ln\left(\frac{8}{79,8}\right) \cong 23$ mn

EXERCICE 2 : (6 points)

I/1) a) $p(C \cap F) = 0,01$

b) $p(C \cap F) + p(C \cap \bar{F}) = p(C)$ équivaut à $p(C \cap \bar{F}) = p(C) - p(C \cap F)$
 $= 0,02 - 0,01 = 0,01$

2) a) $p(C/F) = \frac{p(C \cap F)}{p(F)} = \frac{0,01}{0,03} = \frac{1}{3}$

b) $p(F \cap \bar{C}) = p(\bar{C}/F) \times p(F) = [1 - p(C/F)] \times p(F) = \frac{2}{3} \times 0,03 = 0,02$

3) $p(F \cap \bar{C}) + p(C \cap \bar{F}) = 0,02 + 0,01 = 0,03$

4) $p(A) = p(\bar{C} \cap \bar{F})$.

$p(\bar{C} \cap \bar{F}) + p(F \cap \bar{C}) = p(\bar{C})$ cela équivaut à $p(\bar{C} \cap \bar{F}) = 1 - p(C) - p(F \cap \bar{C}) = 1 - 0,02 - 0,02$
D'où $p(A) = 0,96$

5) au cours de ce contrôle une même épreuve de Bernoulli (A est le succès ou $\bar{A}$ est l'échec) se répète 10 fois de façon indépendante. Alors X suit une loi binomiale de paramètres ($n=10$, $p=p(A)=0,96$)

Ainsi : $p(X=9) = C_{10}^9 \cdot (0,96)^9 \cdot (1 - 0,96) \cong 0,28$

II/1) L'ensemble des valeurs prises par Y est : $Y(\Omega) = \{20, 30, 40\}$

Loi de probabilité de Y :

- $p_1 = p(Y=20) = p(C \cap F) = 0,01$
- $p_2 = p(Y=30) = p(F \cap \bar{C}) + p(C \cap \bar{F}) = 0,03$
- $p_3 = p(Y=40) = p(A) = 0,96$

On peut dresser alors un tableau (tableau de la loi de probabilité de Y)

y_i	20	30	40
p_i	0,01	0,03	0,96

2) Le prix moyen d'une chemise est $E(Y) = \sum_{i=1}^3 p_i \cdot y_i = 20 \times 0,01 + 30 \times 0,03 + 40 \times 0,96$
 $= 39,07$ 500

III/1) $p(T > 5) = 0,2$ équivaut à $e^{-\lambda \cdot 5} = 0,2$
 équivaut à $-\lambda \cdot 5 = \ln(0,2)$
 équivaut à $-\lambda \cdot 5 = \ln(\frac{1}{5})$
 équivaut à $\lambda \cdot 5 = \ln 5$. D'où $\lambda = \frac{\ln 5}{5}$

2) $p(T < 3) = 1 - e^{-\lambda \cdot 3} \cong 0,62$

3) $p(1 < T < 3) = e^{-\lambda \cdot 1} - e^{-\lambda \cdot 3} \cong 0,34$

4) $p(T > 3 / T > 1) = p(T > 2) = e^{-\lambda \cdot 2} \cong 0,53$

EXERCICE 3 : (3 points)

1) c) En effet :

$\text{PGCD}(21, 7) = 7$ or 7 ne divise pas 25 alors l'équation (E) n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

2) a) En effet :

$1 \times (2n+1) + (-1) \times n = 1$ alors d'après l'identité de Bézout $2n+1$ et n sont premiers entre eux.

3) c) En effet :

$$3 \equiv -1[4] \text{ alors } 3^{2n} \equiv (-1)^{2n}[4] \\ \equiv 1[4]. \text{ Donc } 1+3^{2n} \equiv 2[4]$$

EXERCICE 4 : (7 points)

A/ 1)



2) • $g(2) = 2$ équivaut à $2a = 2$ équivaut à $a = 1$

$$\bullet \quad g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{b}{x-1}$$

$$g'(2) = 0 \text{ équivaut à } -1 + b = 0 \text{ équivaut à } b = 1$$

$$\mathbf{3) a) \quad \int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = \int_2^{e+1} 1 + \frac{1}{x-1} dx = [x + \ln|x-1|]_2^{e+1} \\ = e + 1 + 1 - 2 = e$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \mathcal{A} &= \int_2^{e+1} |g(x) - x| dx = \int_2^{e+1} \left(x - \frac{x}{x-1} - \ln(x-1) \right) dx \\ &= \int_2^{e+1} x dx - \int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx - \int_2^{e+1} \ln(x-1) dx \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ On pose : } \begin{cases} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_2^{e+1} \ln(x-1) dx &= [x \cdot \ln(x-1)]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx \\ &= e + 1 - e = 1 \end{aligned}$$

$$\bullet \int_2^{e+1} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_2^{e+1} = \frac{(e+1)^2}{2} - 2$$

$$\text{D'où } \mathcal{A} = \frac{(e+1)^2}{2} - 2 - e - 1 = \frac{e^2 - 5}{2} \text{ (u.a.)}$$

$$\text{B/ 1) } f'(x) = \ln(x-1) + x \frac{1}{x-1} = g(x)$$

2)



$$\text{3) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty \text{ (où } X = x-1 \text{)}$$

Alors (C) admet au $v(+\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(0, \vec{j})$.

4) La fonction $f' = g$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$f''(x) = g'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{(x-1)^2}$$

Alors A(2,0) est un point d'inflexion de la courbe (C).



5)



C/ 1) a) $I_1 = \int_2^e x \ln(x-1) dx = \int_2^e f(x) dx$

$f(x) \geq 0$ pour tout réel x de l'intervalle $[2, e]$, alors I_1 est l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (c), l'axe $(O, \vec{i})$ et les droites d'équations : $x = 2$ et $x = e$.

b) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$

c) On pose : $\begin{cases} u(x) = \ln(x-1) \\ v'(x) = x \end{cases}$ alors $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x-1} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Alors $I_1 = \int_2^e x \ln(x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln(x-1) \right]_2^e - \frac{1}{2} \int_2^e \frac{x^2}{x-1} dx = \frac{e^2}{2} \cdot \ln(e-1) - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln(x-1) \right]_2^e$
 $= \frac{e^2}{2} \cdot \ln(e-1) - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} + e + \ln(e-1) - 4 \right)$
 $= \frac{e^2-1}{2} \cdot \ln(e-1) - \frac{e^2+2e-8}{4}$

2) a) $2 \leq x \leq e$ signifie que $1 \leq x-1 \leq e-1$ alors $1 \leq x-1 \leq e$ car $e-1 \leq e$

Donc $0 \leq \ln(x-1) \leq 1$ car la fonction $\ln$ est croissante sur $[1, e]$.

Et par la suite en multipliant par le réel positif x^n on obtient l'encadrement

$$0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$$

b) On a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$ pour tout réel x de $[2, e]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

En intégrant terme par terme sur $[2, e]$, on obtient : $0 \leq \int_2^e x^n \ln(x-1) dx \leq \int_2^e x^n dx$

Or $\int_2^e x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_2^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{n+1}$ alors $\int_2^e x^n dx \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$ car $\frac{2^{n+1}}{n+1} > 0$

D'où $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n} \frac{e^{n+1}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{e^n} = 0$ (d'après le théorème de comparaison)