المعادلات والمتراجحات والحصر

I) المعادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد :

1) – **تعريف** :

a و b و x أعداد حقيقية ؛ $a \neq 0$ معلوم و b معلوم

كل مساواة على شكل : $a\,x + b = 0$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد وهو x .

2) – **مثال** : كل من الكتابات : $2x+11=0$; $\sqrt{3}.x-\frac{11}{23}=0$; $-\pi-5x=0$; $-\frac{1}{2}x+5=0$

تسمى معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد و هو x .

3) – **حل المعادلة** $a\,x + b = 0$ **في مجموعة ما** :

حلّ في $\mathbb{R}$ (مثلا) المعادلة $a\,x + b = 0$

يعني

ابحث عن مجموعة الحلول المنتمية الى $\mathbb{R}$ والتي نرمز اليها بـ $S_{\mathbb{R}}$

* / الطريقة العملية :

عند إزالة حد من إحدى طرفي معادلة نضيف مقابله إلى الطرف الآخر

* / أمثلة :

أ)– حـل المعادلة : $2x+3=0$ في $\mathbb{Z}$ ثم في $\mathbb{D}$

المعادلة $2x+3=0$ تكافئ على التوالي :
$$\left.\begin{aligned} 2x &= -3 \\ x &= \frac{-3}{2} \end{aligned}\right)$$

$\frac{-3}{2}$ هو عدد ليس من $\mathbb{Z}$ اذن $S_{\mathbb{Z}} = \varnothing$ ، $\frac{-3}{2}$ هو عدد من $\mathbb{D}$ اذن $S_{\mathbb{D}} = \left\{\frac{(-3)}{2}\right\}$

ب)– حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x\sqrt{3}-7=0$

المعادلة $x\sqrt{3}-7=0$ تكافئ على التوالي :

$$\left.\begin{aligned} x\sqrt{3} &= 7 \\ x &= \frac{7}{\sqrt{3}} \\ x &= \frac{7\sqrt{3}}{3} \end{aligned}\right)$$

$\frac{7\sqrt{3}}{3}$ هو عدد من $\mathbb{R}$ اذن $S_{\mathbb{R}}= \{\frac{7\sqrt{3}}{3}\}$

ج) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x+2=3x+2$.

المعادلة $2x+2=3x+2$ تكافئ على التوالي

$$\left.\begin{aligned} 2x-3x &= 2-2 \\ 2x-3x &= 0 \\ -x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}\right)$$

إذن $S_{\mathbb{R}}= \{0\}$

حالات خاصة:

1)– حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(3x-1)-(4-x)=4x-5$

هذه المعادلة تكافئ $3x-1-4+x=4x-5$ اي $4x-5=4x-5$ ومنه :

$$4x-4x=5-5$$
$$0x=0$$

نلاحظ ان جميع الأعداد الحقيقية هي حل للمعادلة وبالتالي : $S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$

2) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $5x+7=-2+5x$.

المعادلة $5x+7=-2+3x$ تكافئ على التوالي :

$$5x-5x=-2-7$$
$$0x=-9$$

وهذا غير ممكن ومنه $S_{\mathbb{R}}= \varnothing$ اي ان المعادلة $5x+7=-2+3x$ ليس لها حـل .

3) – **حل المعادلة** : $(ax+b)(cx+d)=0$

* / بصفة عامة :

a و b عددان حقيقيان معلومان .

$(ax+b)(cx+d)=0$ يعني $(ax+b)=0$ أو $(cx+d)=0$

* / مثال :

حل في $\mathbb{Z}$ ثم في $\mathbb{Q}$ المعادلة : $(2x+4)(-3x-5)=0$.

المعادلة $(2x+4)(-3x-5)=0$ تكافئ على التوالي :

$$\left.\begin{aligned} 2x+4&=0\\ 2x&=-4\\ x&=\frac{-4}{2}\\ x&=-2 \end{aligned}\right\} \text{أو} \left\{\begin{aligned} -3x-5&=0\\ -3x&=5\\ x&=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3} \end{aligned}\right.$$

إذن للمعادلة حلان هما : -2 و $-\frac{5}{3}$ ومنه : $S_{\mathbb{Z}}=\{-2\}$ لان $\frac{5}{-3}$ ليست من $\mathbb{Z}$ بينما $S_{\mathbb{Q}}=\{-\frac{5}{3};-2\}$

4) – **حل المعادلة** : $x^2=a$

*** / بصفة عامة :**

* / إذا كان : $a>0$ فإن المعادلة $x^2=a$ تقبل حلين هما : $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$

* / إذا كان : $a=0$ فإن لمعادلة $x^2=a$ تقبل حلا وحيدا هو العدد 0 .

* / إذا كان : $a<0$ فإن المعادلة $x^2=a$ لا تقبل أي حل .

*** / أمثلة :**

أ – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2=5$.

سيكون لدينا : $x=\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$

إذن المعادلة $x^2=5$ تقبل حلين هما : $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$.

ب – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2=-6$.

المعادلة $2x^2=-6$ تكافئ على التوالي : $\left.\begin{array}{l} x^2=-\frac{6}{2} \\ x^2=-3 \end{array}\right)$ وهذا غير ممكن لان المربع عدد موجب

إذن المعادلة $2x^2=-6$ ليس لها حـل ومنه ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{\quad\}$.

ج – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2x^2+5=x^2+5$.

المعادلة $2x^2+5=x^2+5$ تكافئ على التوالي :

$$2x^2-x^2=5-5$$

اذن $x^2=0$

وبالتـــــالي $x=0$

إذن للمعادلة $2x^2+5=x^2+5$ حـلا وحيدا هو العدد 0 ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{0\}$.

5) – **المعادلات و النشـر** :

أ – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2(3x+2)-5(x-1)=0$.

المعادلة $2(3x+2)-5(x-1)=0$ تكافئ على التوالي : $\left.\begin{array}{l} 6x+4-5x+5=0 \\ 6x-5x=-4-5 \\ x=-9 \end{array}\right)$

إذن العدد -9 هو حـل المعادلة $2(3x+2)-5(x-1)=0$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{-9\}$

ب – حـل في $\mathbb{R}$المعادلة : $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$.

المعادلة $-3(2x+1)=x+2(-x-2)$ تكافئ على التوالي :

$$\left\{\begin{array}{l} -6x-3=x-2x-4 \\ -6x-x+2x=-4+3 \\ -5x=-1 \\ x=\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\{\frac{1}{5}\}$.

6) – **المعادلات و التفكيك :**

1) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$.

المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تكافئ بالتدرج :

$$(x+2)\left[(3x-1)+(-4x+5)\right]=0$$
$$(x+2)(3x-1-4x+5)=0$$
$$(x+2)(-x+4)=0$$

مما يعطي $x=-2$ او $x=4$

إذن المعادلة $(x+2)(3x-1)+(x+2)(-4x+5)=0$ تقبل حلين هما : -2 و 4 .

ومنه $S_{\mathbb{R}}=\{4;-2\}$.

2) – حـل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $25x^2+30x+9=0$.

المعادلة $25x^2+30x+9=0$ تكافئ على التوالي :

$$(5x)^2+30x+3^2=0$$
$$(5x+3)^2=0$$
$$5x+3=0$$
$$5x=-3$$
$$x=\frac{-3}{5}$$

إذن $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{-3}{5}\right\}$

II) حـل المسائل :

1) – التمشي :

لحـل مسألة نتبع التمشي الآتي :
1) – اختيار المجهول .
2) – صياغة المعادلة .
3) – حـل المعادلة .
4) – اختيار الحل المنطقي الموافق للمسألة .

2) – مثال :

حصـان يحمل على ظهره 5 أكياس و 20 kg من القمح و3 أكياس و 10 kg من الذرة، و جمل يحمل 3 أكياس و 80 kg من القمح و كيسان (2) و 50 kg من الشعير . فأجهد ذلك على الجمل فقال له الحصان : كيف تشعر بالتعب و نحن نحمل نفس الوزن ؟ إذا علمت أن الكيس الواحد من الشعير يزيد عن الكيس الواحد من القمح ب 10 kg، فما هو وزن الكيس الواحد من كـل نوع ؟

الحـل :

1) – اختيار المجهول : ليكن x وزن الكيس الواحد من القمح .

2) – صياغة المعادلة : بما أن x هو وزن الكيس الواحد من القمح فإن $(x+10)$ هو وزن الكيس الواحد من الشعير .

إذن : -- الوزن الذي يحمله الحصان هو : $(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]$.

-- الوزن الذي يحمله الجمل هو : $(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$.

و بما أن الحصان و الجمل يحملان نفس الوزن فستكون لدينا المعادلة الآتية :

$$(5x+20)+\left[3(x+10)+10\right]=(3x+80)+\left[2(x+10)+50\right]$$

3) – حـل المعادلة :

تكافئ على التوالي : $\left(3x+80\right)+\left[2\left(x+10\right)+50\right] = \left(5x+20\right)+\left[3\left(x+10\right)+10\right]$ المعادلة

$$3x+80+2x+20+50 = 5x+20+3x+30+10$$
$$3x+2x-5x-3x = 20+30+10-80-20-50$$
$$-3x = -90$$
$$x = 30$$

***) ملاحظة :** لنتحقق من الحـل :

$$\left(5x+20\right)+\left[3\left(x+10\right)+10\right] = 5\times30+20+3\left(30+10\right)+10$$
$$=150+20+3\times40+10=300$$
$$\left(3x+80\right)+\left[2\left(x+10\right)+50\right] = 3\times30+80+2\left(30+10\right)+50$$
$$=90+80+2\times40+50=300$$

إذن العدد 30 هو حـل المعادلة $\left(5x+20\right)+\left[3\left(x+10\right)+10\right] = \left(3x+80\right)+\left[2\left(x+10\right)+50\right]$

4)– الرجوع إلى المسألة :

وزن الكيس الواحد من القمح هو : 30 kg .

وزن الكيس الواحد من الذرى هو : 40 kg .

III – الحصر :

1) – حصر مجموع عددين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية بحيث :

اذا كان $x \le a \le y$ و $z \le b \le t$

فان $x+z \le a+b \le y+t$

*** مثال :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3 \le x \le 8$ و $-4 \le y \le 2$

لنحصر $x+y$.

لدينا : $3+\left(-4\right) \le x+y \le 8+2$

إذن : $-1 \le x+y \le 10$

2) – حصر مقابل عدد حقيقي :

a عدد حقيقي $x \le a \le y$

يعني $-y \le -a \le -x$

3) – حصر فرق عددين حقيقيين :

ملاحظة هامة : لحصر $a-b$ ، نكتب $a-b=a+(-b)$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

* مثال :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 8$ و $-4\le y\le 2$ ؛ لنحصر $x-y$.

لدينا : $-2\le -y\le 4$ و $3\le x\le 8$ إذن : $3-2\le x+(-y)\le 8+4$

و منه فإن : $1\le x-y\le 12$

4) – حصر جذاء عددين حقيقيين :

a و b و x و y و z و t أعداد حقيقية **موجبة** بحيث :

$x\le a\le y$ و $z\le b\le t$

$x\times z\le a\times b\le y\times t$

*** مثال 1 :**

x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 7$ و $1\le y\le 3$ ؛ لنحصر $x\times y$.

لدينا : $3\times 1\le x\times y\le 7\times 3$ إذن : $3\le x\times y\le 21$

* مثال 2 :

x و y عددان حقيقيان بحيث : $-5\le x\le -2$ و $3\le y\le 6$ ؛ لنحصر $x\times y$.

لدينا : $2\le -x\le 5$ إذن : $2\times 3\le (-x)\times y\le 5\times 6$ أي $6\le -xy\le 30$

و منه فإن : $-30\le xy\le -6$.

5) – حصر مقلوب عدد حقيقي غير منعدم :

استنتاج :

a و x و y أعداد حقيقية غير منعدمة ولها نفس العلامة

$x\le a\le y$ **يعني** $\frac{1}{y}\le\frac{1}{a}\le\frac{1}{x}$

6) – حصر خارج قسمة عددين :

ملاحظة هامة : لحصر $\frac{a}{b}$ علما ان b مخالف للصفر ، نكتب $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$ ثم نطبق القاعدتين أعلاه

*مثال : x و y عددان حقيقيان بحيث : $3\le x\le 7$ و $5\le y\le 9$ ؛ لنحصر $\frac{x}{y}$.

لدينا : $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$ إذن : $3\times\frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7\times\frac{1}{5}$ أي $\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

<u>* تمرين تطبيقي محوصل :</u>

a و b و c أعداد حقيقية بحيث : $6 \leq a \leq 8$ و $-4 \leq b \leq -2$ و $-3 \leq c \leq 5$

أحصر : a^2 و b^2 و $a+2b-4c$ و $\frac{a+b}{b^2}$

<u>الحـل :</u>

1) – حصر a^2 .

لدينا : $6^2 \leq a^2 \leq 8^2$ و منه فإن : $36 \leq a^2 \leq 64$

2) – حصر b^2 .

لدينا : $(-2)^2 \leq b^2 \leq (-4)^2$ و منه فإن : $4 \leq b^2 \leq 16$

3) – حصر $a+2b-4c$.

لدينا : $-8 \leq 2b \leq -4$ و $-4\times(-3) \leq -4c \leq -4\times 5$ أي $12 \leq -4c \leq 20$

إذن : $6+(-8)+12 \leq a+2b-4c \leq 8+(-4)+20$ و منه فإن : $10 \leq a+2b-4c \leq 24$

4) – حصر $\frac{a+b}{b^2}$.

لدينا : $6+(-4) \leq a+b \leq 8+(-2)$ أي $2 \leq a+b \leq 6$ و $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{4}$

إذن : $2\times\frac{1}{16} \leq (a+b)\times\frac{1}{b^2} \leq 6\times\frac{1}{4}$ أي $\frac{2}{16} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{6}{4}$

و بالتالي فإن : $\frac{1}{8} \leq \frac{a+b}{b^2} \leq \frac{3}{2}$

<u>أخطاء شائعة :</u>

1) $1 \leq x \leq 3 \not\Rightarrow -1 \leq -x \leq -3$ و الصواب هو $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq -x \leq -1$

2) $x \leq y \Rightarrow \cancel{x^2 \leq y^2}$ مثال : $-5<2$ لكن $25>4$ اصلح الخطأ باضافة الشروط

3) $\left.\begin{matrix} a \le x \le b \\ a' \le x' \le b' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{a - a' \le x - x' \le b - b'}$ اصلح الخطأ .

4) الاعداد a و b و a' و b' موجبة قطعا : $\left.\begin{matrix} a \le x \le b \\ a' \le x' \le b' \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cancel{\frac{a}{a'} \le \frac{x}{x'} \le \frac{b}{b'}}$

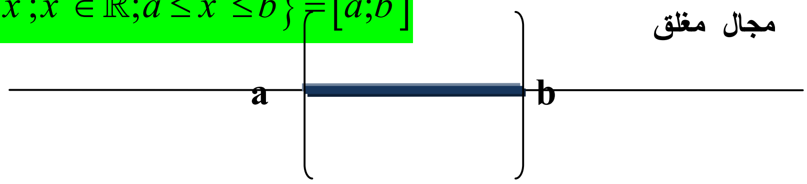
5) $2 \le x \le 3 \not\Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{3}$ و الصواب هو $2 \le x \le 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{2}$

IV-المجالات :

نعتبر عددين حقيقيين a و b بحسث $a \le b$ لدينا :

مجال مغلق

$\{x ; x \in \mathbb{R} ; a \le x \le b\} = [a;b]$

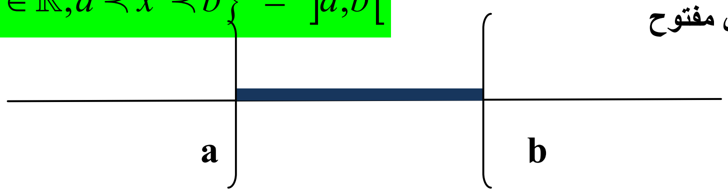


مجال نصف مغلق

$\{x ; x \in \mathbb{R} ; a \le x \prec b\} = [a;b[$

مجال مفتوح

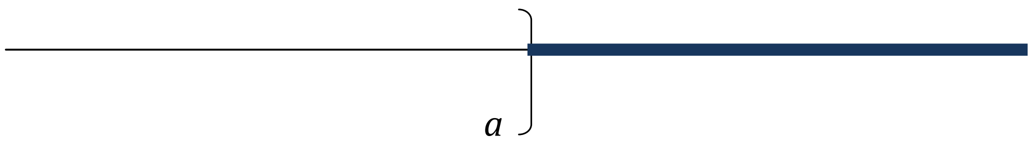
$\{x ; x \in \mathbb{R} ; a \prec x \prec b\} =]a;b[$



نعتبر عدد حقيقي a لدينا :

1) $\{x ; x \in \mathbb{R} ; x \le a\} =]-\infty ; a]$

2) $\{x ; x \in \mathbb{R} ; x \succ a\} =]a ; +\infty[$



امثلة :

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};-1\le x\le\sqrt{3}\right\}=\left[-1;\sqrt{3}\right]$$

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};\frac{2}{7}\le x\prec\sqrt{11}\right\}=\left[\frac{2}{7};\sqrt{11}\right[$$

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};-5\prec x\prec\sqrt{3}\right\}=\left]-5;\sqrt{3}\right[$$

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};x\prec\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\left]-\infty;\frac{\sqrt{3}}{2}\right[$$

خطأ شائع :

$\left\{x;x\in\mathbb{R};5\prec x\prec-1\right\}=\cancel{]5;-1[}$ لكن $\left\{x;x\in\mathbb{R};5\prec x\prec-1\right\}=\varnothing$ والعلة هي :

$5\succ-1$

هام : $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[\quad;\quad\mathbb{R}_+=[0;+\infty[\quad;\quad\mathbb{R}_-^*=]-\infty;0[$

حالات خاصة:

نعتبر عدد حقيقي a لدينا :

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};|x|\le a\right\}=[-a;a]$$

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};|x|\succ a\right\}=]-\infty;-a[\cup]a;+\infty[$$

امثلة :

$$\left\{x;x\in\mathbb{R};|x|\le\frac{2}{3}\right\}=\left[-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right]$$

$$\left\{x\,;x\in\mathbb{R};|x|\geq\frac{2}{3}\right\}=\left]-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right[$$

تحذ يــر:

$$E=\{x\,;x\in\mathbb{Z};-4\prec x\leq 3\}=\cancel{\left]-4;\sqrt{3}\right]}$$

والصواب هو $E=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ لان $x\in\mathbb{Z}$

II) المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحـد :

1) – تعريف :

a و b و x أعداد حقيقية ؛ $a\neq 0$

كل لا مساواة على شكـل : $ax+b>0$ أو $ax+b\geq 0$ أو $ax+b<0$ أو $ax+b\leq 0$

تسمى متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد x .

2) – أمثـلة :

العبارات : $2x+5<0$ و $\sqrt{2}.x-5>0$ و $\frac{1}{2}x-11\leq 0$ و $3x+3\geq 0$

تسمى متراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد هو x .

* / ملاحظة هامة : **مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق متراجحة ما تسمى مجموعة حلول هذه المتراجحة وهي عادة في شكل مجـال.**

3) – حـل متراجحة :

أ – حـل في المتراجحة : $3x+2<0$.

المتراجحة $3x+2<0$ تكافئ على التوالي :

$$3x<-2$$

$$x<\frac{-2}{3}$$

الأعداد الحقيقية الأصغر قطعا من $\frac{-2}{3}$ هي حلول المتراجحة $3x+2<0$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\left]-\infty;\frac{-2}{3}\right[$

ب – حـل المتراجحة : $-x+4\leq 2x-2$.

المتراجحة $-x+4\le 2x-2$ تكافئ على التوالي :

$$\left.\begin{array}{l} -x-2x\le -2-4 \\ -3x\le -6 \\ x\ge \dfrac{-6}{-3} \\ x\ge 2 \end{array}\right\}$$

ومنه : $S_{\mathbb{R}}=[2;+\infty[$

الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي 2 هي حـلول المتراجحة $-3x+4\le 2x-2$.

<u>* / تمثيل الحـلول على مستقيم مدرج :</u>

خطأ شائع :

لنحل المتراجحة $1-\frac{5x+4}{3}\le 2$ في $\mathbb{R}$: $1-\frac{5x+4}{3}\le 2$ يعني $\frac{3}{3}-\frac{5x+4}{3}\le\frac{6}{3}$ يعني

$3-5x\cancel{+}4\le 6$ والصواب هو $3-5x-4\le 6$ يعني $-5x\le 6-3+4$ يعني $-5x\le 7$

يعني $\cancel{x\le\frac{7}{-5}}$ والصواب هو $\underbrace{\left(\frac{-1}{5}\right)}_{\in\mathbb{R}_-}\times(-5x)\ge 7\times\underbrace{\left(\frac{-1}{5}\right)}_{\in\mathbb{R}_-}$ يعني $x\ge-\frac{7}{5}$ ومنه $S_{\mathbb{R}}=\left[-\frac{7}{5};+\infty\right[$