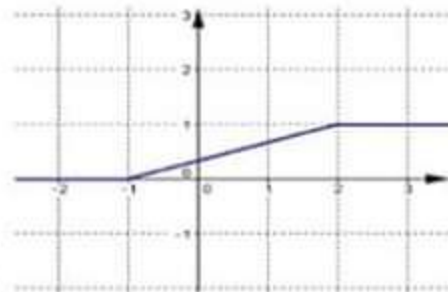


Exercice 8 :

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois propositions est exacte. Indiquer la bonne réponse.

Question 2 : Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi uniforme, sa fonction de répartition est donnée ci-contre :



1°) La densité de X est la fonction f définie sur $[-1, 2]$ par $f(x) =$

a) $\frac{1}{3}$ b) 3 c) $-\frac{1}{3}$

2°) $P(X < 1 / X < 0) =$

a) $1 - e^{-1}$ b) 1 c) 0.

3°) On considère l'inéquation (E) : $3^x \geq 1$, on choisit au hasard un réel x dans $[-1, 2]$. La probabilité d'avoir x solution de (E) est égale à :

a) 0 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$.

Question 3 : Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

Soit n un entier naturel. On pose $u_n = P\left(\frac{n}{10} \leq X \leq \frac{n+1}{10}\right)$, (u_n) est une suite géométrique de raison $q =$

a) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

3:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n^2 + n) \wedge (2n) =$

a) n b) $2n$ c) $2n + 1$.

Question 4 :

Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \int_1^{\ln x} \left(x^2 t e^{-t} \right) dt$

La dérivée de F sur $]0, +\infty[$ est définie par $F'(x) =$

a) $\frac{(\ln x)^{\frac{5}{2}}}{x}$ b) $\sqrt{x} \left[\frac{3}{2} \int_1^{\ln x} (t e^{-t}) dt + \frac{\ln x}{x} \right]$ c) $x^{\frac{5}{2}} e^{-x}$.

3). Donner une équation de la droite de régression D de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Représenter la droite D dans le repère précédent.

Ajustement non affine

On pose $z = \ln(y)$ Montrer qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par

$$Z = -0,22x + 8,01.$$

1) Déterminer une expression de y en fonction de x de la forme $A^x \times B$ où A est un réel arrondi au centième près et B est un réel arrondi à l'unité près.

2) Déterminer après combien d'années d'utilisation le prix de revente devient inférieur ou égal à 500 dinars.

3)- Après 6 années d'utilisation le prix de revente d'une machine est de 780 dinars.

Des deux ajustements précédents, quel est celui qui semble le mieux estimer le prix de revente après 6 années d'utilisation ? On argumentera la réponse

Exercice 7 :

On appelle capacité vitale chez l'homme, le volume d'air maximum pouvant être mobilisé par une inspiration forcée suivie d'une expiration forcée.

Le tableau ci-dessous donne la capacité vitale C, exprimée en cm^3 , chez les hommes âgés de 40 ans en fonction de leur taille t exprimée en cm.

t (en cm)	152	156	160	166	170	174	178	180	182
C (en cm^3)	3525	3620	3710	3850	3945	4035	4130	4175	4220

- 1) a) Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire entre t et C.
 b) justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (t,C).
 a) Donner une équation de la droite de régression de C en t. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près) .
 b) Dédire de cet ajustement une estimation de la capacité vitale d'un homme âgé de 40 ans et de taille égale à 188 cm
- 2) En fait, la capacité vitale C (exprimée en cm^3) chez l'homme dépend de sa taille t (exprimée en années).
 De nombreuses expériences ont permis d'exprimer C en fonction de t et g selon la relation (R) : $CC = \alpha t + \beta g + 754$ où α et β sont des constantes (ne dépendent pas de t et g).
 a) Donner l'expression de C pour g40.
 b) En déduire, e, utilisant 1/ c), les valeurs de α et β .
- 3) Estimer la capacité vitale d'un homme âgé de 50ans et mesurant 188cm.

1) a) Calculer $p(N_2 / B_1)$, $p(B_2 / B_1)$, $p(N_2 / N_1)$ et $p(B_2 / N_1)$

b) Montrer que la probabilité de l'événement B_2 égale à $\frac{3k+6}{4k+12}$

2) Dans cette question on prend $k = 12$.

3) Un joueur mise 8 dinars et effectue une épreuve. Si à la fin de l'épreuve le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne le joueur reçoit 12 dinars. Si non il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a) Montrer que les valeurs possibles de X sont -4 et -8 .

b) Déterminer la loi de probabilité de X .

c) Calculer l'espérance mathématique de X ainsi que sa variance.

d) Le jeu est-il favorable au joueur.

Exercice 5

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle :

- **P** l'événement « l'élève fait partie du club photo »
- **T** l'événement « l'élève fait partie du club théâtre »

Montrer que les événements **P** et **T** sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents.

Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort. On appelle :

* T_1 l'événement : « le premier élève appartient au club théâtre »

* T_2 l'événement : « l'élève pris en photo appartient au club théâtre »

(a) Copier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

(b) Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite. Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Exercice 6 :

Une machine est achetée à 3000 dinars. Le prix de revente y , exprimé en dinars, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3000	2400	1920	1536	1229	983

Ajustement affine

1). Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i; y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 dinars sur l'axe des ordonnées.

2). Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.

du deuxième choix.

- 3) Le responsable achète le MP5 du premier fournisseur à 80 dinars et du second à 72^D et il vend le MP5 à 125^D s'il est du premier choix et à 15^D si non .
On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque MP5 vendu associe le gain algébrique en dinars réalisé par le responsable .
- Déterminer la loi de probabilité de X .
 - Calculer l'espérance mathématique de X . Donner une interprétation de ce résultat .
- 4) La durée de vie en mois d'un MP5 est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .
- La probabilité qu'un MP5 dépasse 5 mois de durée de vie est 0,325. Déterminer λ . On prend dans la suite $\lambda = 0,225$.
 - Quelle est la probabilité qu'un MP5 dure moins de 8 mois ?
 - Quelle est la probabilité qu'un MP5 dure au plus 2 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 mois.

Exercice 3 :

Au début de l'épidémie on constate que 0,01% de la population est contaminé .

Pour t appartenant à $[0 ; 30]$, on note $y(t)$ le pourcentage de personnes touchées par la maladie après t jours. On a donc $y(0)=0,01$.

On admet que la fonction y ainsi définie sur $[0,30]$ est dérivable , strictement positive et vérifie $y' = 0,05y(10-y)$.

- 1) On considère la fonction z définie sur $[0 ; 30]$ par $z = \frac{1}{y}$. Démontrer que :
- y satisfait aux conditions $y(0)=0,01$ et $y' = 0,05y(10-y)$ si et seulement si z satisfait aux conditions $z(0)=100$ et $z' = -0,5z + 0,05$.
- 2) a) En déduire une expression de la fonction z puis celle de la fonction y .
b) Calculer le pourcentage de la population infectée après 30 jours. On donnera la valeur arrondie à l'entier le plus proche .
- 3) le quart de la population est vaccinée contre cette maladie contagieuse . De plus , on estime que sur la population vaccinée , 92% des individus ne tombent pas malades . Sur la population totale on estime aussi que 10% des individus sont malades . On choisit au hasard un individu de cette population.
- Montrer que la probabilité de l'événement A : « l'individu n'est pas vacciné et tombe malade » est égale à 0,08.
 - Quelle est la probabilité de tomber malade pour un individu qui n'est pas vacciné ?

Exercice 4

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher

- U_1 contient k boules blanches (k un entier naturel supérieur ou égal à 1) et trois boules noires.
- U_2 contient deux boules blanches et une boule noire..

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2 . On tire ensuite au hasard une boule dans U_2 .

On note $*B_1$ (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 »

$*B_2$ (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 »

Partie 03

Probabilité et statistique

Exercice 1 : Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher : deux blanches et trois noires.

1) On extrait au hasard et simultanément deux boules de l'urne.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « tirer deux boules blanches »

B « tirer deux boules de la même couleur »

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer l'espérance $E(X)$ de X.

2) On effectue maintenant un tirage de deux boules de la façon suivante :

On tire une première boule de l'urne, on note sa couleur, on la remet dans l'urne et on ajoute une autre boule de la même couleur que la boule tirée. On tire ensuite une seconde boule.

On note B_1 : « tirer une boule blanche au premier tirage »

B_2 : « tirer une boule blanche au deuxième tirage »

a) Calculer $p(B_1)$, $p(B_2/B_1)$ et $p(B_2/\overline{B_1})$

b) En déduire que $p(B_2) = \frac{2}{5}$

c) Calculer la probabilité de tirer une boule noire au second tirage.

d) A la fin de l'épreuve, on a su qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité d'avoir tiré une boule noire au premier tirage ?

3) On remet l'urne dans son état d'origine : contenant 2 boules blanches et 3 boules noires.

On répète l'épreuve de la question 2) n fois de suite ($n \geq 2$) de façon indépendante et dans les mêmes conditions, en remettant après chaque épreuve dans son état original. On note Z la variable aléatoire égale aux nombres de réalisation de l'événement B_2 .

a) Exprimer $p(Z=4)$ en fonction de n.

b) Donner $E(Z)$ et $\sigma(Z)$.

c) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins une fois l'événement B_2 ?

d) Déterminer le plus petit entier n pour que $p_n \geq 0,99$

Exercice 2 :

Un responsable d'un magasin achète des MP5 auprès de deux fournisseurs F_1 et F_2 dont 25% du fournisseur F_1 .

La proportion des MP5 du deuxième choix est de 2 % chez le fournisseur F_1 et de 4 % chez le second. On considère les événements :

D : « Le MP5 est du deuxième choix »

F_1 : « le MP5 provient du fournisseur F_1 »

F_2 : « le MP5 provient du fournisseur F_2 »

1) a. Donner un arbre pondéré.

b. Calculer $P(D \cap F_1)$ puis démontrer que $P(D) = 0,035$.

c. Un MP5 est du deuxième choix. Quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

2) Le responsable commande 20 MP5, quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient

2. n est un entier. Montrer que
$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{11} \\ n \equiv 9 \pmod{13} \end{cases}$$
 si et seulement si $n \equiv 22 \pmod{143}$
3. (a) Vérifier que $55^{143} \equiv 9 \pmod{13}$.
 (b) Déterminer le reste de 55^{143} modulo 143.

Exercice 10:

- 1) Soit $x \in \mathbb{Z}$
- Déterminer les restes modulo 7 de x^2 .
 - Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 - 4x + 3 \equiv 0 \pmod{7}$
- 2) Soit n un entier naturel
- Déterminer suivant n le reste modulo 7 de 2^n
 - Déterminer le reste modulo 7 de l'entier 107^{2009}
 - Déterminer les entiers naturels n tel que $107^n + 107^{2n} + 107^{3n}$ soit divisible par 7
- 3) Soit a un entier naturel non divisible par 7

On désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod{7}$

- Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod{7}$.
 - Quelles sont les valeurs possibles de k .
- 4) A tout entier n , on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$

Montrer $A_{2012} \equiv 6 \pmod{7}$

Exercice 12:

- Etudier suivant les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.
 - Pour tout entier naturel n on pose $S_n = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n$
 - Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $4S_n = 5^{n+1} - 1$
 - Soit a un entier, montrer que $4S_n \equiv a \pmod{7}$ si et seulement si $S_n \equiv 2a \pmod{7}$
 - Déterminer tous les entiers naturels n tels que S_n soit divisible par 7.
 - Soit n un entier naturel non nul donné
- On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E): $5^n x + S_n y = 1$
- Justifier que (E) admet au moins une solution
 - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E)

b) Un groupe de garçons et de filles a dépensé 100 dinars dans une excursion. Chaque garçon a dépensé 8 dinars et chaque fille a dépensé 5 dinars. Donner les répartitions des groupes possibles.

Exercice 5 :

- 1) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 \equiv 8 \pmod{41}$
 b) Etablir l'équivalence : $x^2 - 19x - 10 \equiv 0 \pmod{41} \Leftrightarrow (x + 11)^2 \equiv 8 \pmod{41}$.
 c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation : $x^2 - 19x - 10 \equiv 0 \pmod{41}$.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $6^n + 13^{n+1}$ est divisible par 7.
- 3) a) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste modulo 7 de 2^n .
 b) En déduire que si n n'est pas un multiple de 3 alors $2^{2n} + 2^n + 1$ est divisible par 7.

Exercice 6 :

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 13 de 5^n .
- 2) Pour tout entier naturel n , on pose $A_n = 5^n + 5^{2n} + 5^{3n}$
 a) Déterminer, suivant les valeurs de n , le reste modulo 13 de A_n .
 b) Déterminer alors l'ensemble des entiers naturels n tels que $A_n \equiv -1 \pmod{13}$.
- 3) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que : $(25)^n + (8)^n + (2007)^n \equiv -1 \pmod{13}$

Exercice 7 :

- 1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $E : 11x + 8y = 3$.
 a) Soit (x, y) une solution de E , quelles sont les valeurs possibles de $x \wedge y$.
 b) Montrer que les solutions de E sont les couples (x, y) tels que $x = -8k + 1$ et $y = 11k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
 En déduire l'ensemble des entiers, tel que $x \wedge y = 3$.
- 2) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation $E' : 11x + 8y = 79$.
 a) Déterminer l'inverse de 8 modulo 11
 En déduire que si (x, y) est une solution de E' alors $y \equiv 3 \pmod{11}$.
 b) Résoudre alors l'équation E' .
- 3) Déterminer le reste modulo 11 de 8^{30} ; En déduire que $8^9 \equiv 7 \pmod{11}$ que $8^{2019} \cdot 7$ est divisible par

Exercice 8 (bac 2014 contr)

- 1) Soit dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $1111x - 10^4y = 1$.
 a) Vérifier que $(-9, -1)$ est une solution de (E).
 b) Résoudre l'équation (E).
- 2) Soit n un entier,
 a) Montrer que s'il existe deux entiers p et q tels que $n = 1111p$ et $n = 1 + q10^4$ alors (p, q) est une solution de (E).

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{1111} \\ n \equiv 1 \pmod{10^4} \end{cases}$$

 b) Déterminer alors l'ensemble des entiers n tels que
 c) En déduire le plus petit entier naturel multiple de 1111 et dont le reste dans la division euclidienne par 10^4 est égal à 1.

Exercice 9:

1. On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x - 13y = 9$
 (a) Vérifier que $(2, 1)$ est une solution de (E),
 (b) Résoudre (E).

Partie 02

Arithmétique

Exercice 1 :

- Vérifier que : $13^6 \equiv 1 \pmod{7}$
- En déduire le reste modulo 7 de l'entier 13^{2018} .
- Soit n un entier, on pose $a = 2n-3$ et $b = 3n-1$.
 - Montrer que tout diviseur commun de a et b , divise 7.
 - En déduire les valeurs possibles de $a \wedge b$
 - Pour quelles valeurs de n , a-t-on $a \wedge b = 7$.
- Pour $a = 2 \cdot 13^{2018} - 3$ et $b = 3 \cdot 13^{2018} - 1$, Trouver $a \wedge b$.

Exercice 2:

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = 5u_n - 2, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Calculer u_1, u_2, u_3 , et u_4 .
 - Que peut-on dire à propos des deux derniers chiffres du terme u_n ?
 - Montrer, par récurrence, que pour tout entier n , $u_n \equiv 13 \pmod{50}$.
 - En déduire les deux derniers chiffres du terme u_n .
- Montrer que pour tout entier n : u_n et u_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

Exercice 3:

On considère l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $(E) : 36x - 25y = 5$ où (x,y) est le couple d'inconnues.

- Déterminer une solution particulière de l'équation $(E') : 36x - 25y = 1$
 - En déduire un couple (x_0, y_0) , solution particulière de E .
 - Résoudre alors E dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Soit (x,y) un couple solution de E et $d = x \wedge y$
 - Montrer que $d=1$ ou $d=5$.
 - Déterminer les couples (x,y) , solutions de (E) tels que x et y soient premiers entre eux.

Exercice 4 :

On considère l'équation $(E) : 8x + 5y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

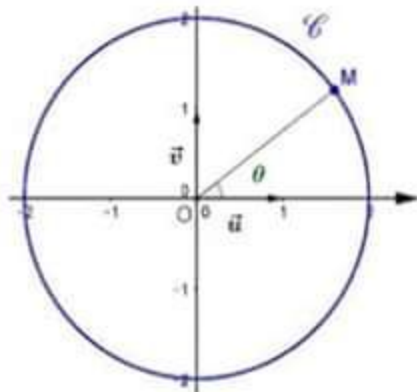
- Citer le théorème permettant d'affirmer que l'équation (E) a des solutions.
 - Donner une solution particulière de (E) .
 - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) .
- Résoudre dans $\mathbb{Z} : (S) \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$
 - Dans le cas où x est un entier solution de (S) , déterminer le reste de la division euclidienne de x par 40.
- On considère l'équation $(E') : 8x + 5y = 100$.
 - Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E') .

Exercice 9 :

1. a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $Z^3 = -i$
 b) En déduire les solutions de l'équation $z^3 + i(1-z)^3 = 0$
2. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (2i-1)z - i = 0$
3. a) Factoriser $z^3 + i(1-z)^3$
 b) En déduire que $z^3 + i(1-z)^3 = 0$ équivaut à $z = \frac{1}{2}(1+i)$ ou $z^2 + (2i-1)z - i = 0$
 c) Retrouver les solutions de $z^3 + i(1-z)^3 = 0$
4. Soit a une solution de $z^3 + i(1-z)^3 = 0$ on pose $a = re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 a) Montrer que $|a| = |1-a|$ puis $r = \frac{1}{2\cos(\alpha)}$
 b) Montrer que $r^3 e^{i3\alpha} + i r^3 e^{-3i\alpha} = 0$. En déduire les valeurs possibles de α .
 c) Déduire la forme exponentielle des solutions de l'équation $z^3 + i(1-z)^3 = 0$

Exercice 10:

1. a. Vérifier que $1 - i\sqrt{3}$ est une racine carrée de $-2 - 2i\sqrt{3}$.
 b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E: z^2 - 3 + i\sqrt{3}z + 2(1 + i\sqrt{3}) = 0$
 c. Donner les solutions de (E) sous forme exponentielle.
2. On désigne par A, B et B' les points d'affixes respectives 2, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{b}$.
 Dans l'annexe ci-jointe, on a placé sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 2 le point M d'affixe $z = 2e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$.
 a. Construire les points A, B, B' et le point M' d'affixe $z' = 2e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta}{2})}$
 b. Montrer que $z' = \frac{b}{2}z$
 3. On désigne par K et K' les milieux respectifs de [BM] et [B'M'].
 a. Vérifier que $z_K = \frac{2\bar{b} + bz}{4}$
 Montrer que : $b^2 - 4b = 2\bar{b} - 8$ et que $z_K - 2 = \frac{b}{2}z_K - 2$
 c. En déduire que lorsque M varie sur le cercle $\mathcal{C}$, la médiatrice de [KK'] passe par un point fixe que l'on précisera.



- a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Placer dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M, N et P.

- b) Donner l'écriture algébrique de chacun des nombres complexes $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

Montrer que le quadrilatère MNAP est un parallélogramme.

- 4) a) Montrer que si α est une solution de (E) alors $\bar{\alpha}$ est une solution de (E).
b) En déduire les affixes des points M pour lesquels MNAP est un parallélogramme.

Exercice 7 :

- 1) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
b- Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

- 3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$ et M le point du cercle (Γ) d'affixe $2e^{i\theta}$.

On désigne par N le point de (Γ) tel que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = \frac{\pi}{3} [2\pi]$. Justifier que N a pour affixe $2e^{i(\frac{\pi}{3} + \theta)}$.

- 4) Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- a) Vérifier que r a pour expression complexe : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.
b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que $r(F) = K$.
c) En déduire la nature du triangle AFK.

- 5) a) Montrer que $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$.

b) En déduire l'affixe du point M pour la quelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

Exercice 8 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $\frac{z}{\bar{z}}$ soit réel.

- 2) On considère les points M, N et Q d'affixes respectives, z, $\bar{z}$ et $\frac{z^2}{z}$.

- a) Vérifier que $\frac{z_Q - z_M}{z_N - z_M} = -\frac{z}{\bar{z}}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que M, N et Q soient alignés

- 3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2iz - (1 - e^{2i\theta}) = 0$ ou $\theta \in]0, \pi[$

- 4) On pose M d'affixe $z = i(1 - e^{i\theta})$

a) Ecrire z sous la forme exponentielle

b) Déterminer en fonction de θ , une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ})$.

c) Déterminer alors θ pour que le triangle MNQ soit équilatéral

c) Résoudre alors l'équation (E).

d) Utiliser ce qui précède pour construire le point Ω antécédent par f du point Ω' d'affixe $\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 (bac 2013)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i . On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1. Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

- Calculer $\text{Aff}(\vec{EM})$ et $\text{Aff}(\vec{FN})$.
 - Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2 .
 - Montrer que les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.
- Soit P le point d'affixe z_P telle que $Z_P = (1 - i)\sin\theta \cdot e^{i\theta}$.
 - Montrer que $\frac{\text{Aff}(\vec{EP})}{\text{Aff}(\vec{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\vec{FP})}{\text{Aff}(\vec{FN})}$.
 - Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5 :

1) Soit θ un réel appartenant à $]0, \pi[$. On considère l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2z - 2i \sin \theta e^{i\theta} = 0$. On note z_1 et z_2 les solutions de (E_θ) .

- Sans calculer z_1 et z_2 montrer que $\arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta - \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$
- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2)-Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, M et N les points d'affixes respectives : $z_A = 2$, $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$.

- Ecrire z_M et z_N sous forme exponentielle.
- Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans $]0, \pi[$.
- Donner la nature du quadrilatère OMAN.
- Trouver θ sachant que le quadrilatère OMAN est un carré.

Exercice 6 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe -2 . On considère l'équation (E) : $3z^3 - 2z^2 + 4z + 16 = 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et M, N et P les points d'affixes respectives α , $\frac{3}{2}\alpha^2$ et $\frac{8}{\alpha}$.

- Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ alors les points M, N et P sont alignés.
Dans la suite de l'exercice on suppose que α n'appartient pas à $\mathbb{R}$.
- Montrer que si MNAP est un parallélogramme, alors α est une solution de l'équation (E).
- Dans cette question on prend $\alpha = 1 + i\sqrt{3}$.

Partie 01

Nombres Complexes

Exercice 1: On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation: $(E): (1-i)z^2 - 2(\cos \theta + i \sin \theta)z + 1+i = 0$ où θ est un paramètre réel appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$. On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) avec $\text{Im}(z_1) > 0$, pour tous les réels θ .

1) a) Sans calculer z_1 et z_2 , montrer que $z_2 = \frac{1}{z_1}$.

b) Trouver alors une relation entre les modules et les arguments de z_1 et z_2 .

2) a) Déterminer z_1 et z_2 . Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

b) Préciser la valeur de θ pour que $z_1 = z_2$.

Exercice 2:

i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2i = 0$

ii) Soit θ un paramètre réel au quel on associe l'équation: $(E_\theta): z^2 - 2e^{i\theta}z + 2e^{2i\theta} = 0$.

1) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) . On note z_1 et z_2 les deux solutions.

b) Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2) Soient M_1 et M_2 les points images respectifs de z_1 et z_2 dans le plan complexe.

a) Calculer $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$. En déduire une mesure de $(\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2})$.

b) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3:

P désigne le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, α un réel de l'intervalle $]0, 2\pi[$ et ζ le cercle de centre B et de rayon 1.

I) 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation: $z^2 - i(2 \cdot e^{i\alpha})z + e^{2i\alpha} - 1 = 0$

2) Ecrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation

II) Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ vers $P \setminus \{A\}$ qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{\bar{z} - i}{z + i}$

1) a) Montrer que f n'a aucun point invariant.

b) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a $z' - 1 = \frac{-2i}{z + i}$

c) En déduire que $\forall M \in P \setminus \{B\}$, on a: $AM' \cdot BM = 2$ et $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM'}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

d) Construire le point M' à l'aide d'un point M du cercle ζ .

2) Soit (E) l'équation dans $\mathbb{C}$: $(\bar{z} - i)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)(\bar{z} + i)^3$

a) Montrer que si z est une solution de E alors z est réel.

b) Montrer que si $z' = e^{i\alpha} \Leftrightarrow z = -\cot g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

Révision Mathématique

Auteur : Habib Haj Salem
Section : Bac Mathématiques

*"Tu as droit au succès et tu as droit au bonheur.
Tu le mérites !*

Cherry Blossom

Table de matière

Partie 1	Nombres complexes
Partie 2	Arithmétique
Partie 3	Probabilités et Statistiques
Partie 4	Isométries – Similitudes
Partie 5	Suites
Partie 6	Coniques
Partie 7	Ln et Exp
Partie 8	Géométrie dans l'espace

"نحن هنا لكي نضع بصمتنا في هذا الكون، وإلا ما فائدة مجيئنا إليه!!؟"
"ستيف جوبز"

