

Exercice N°1

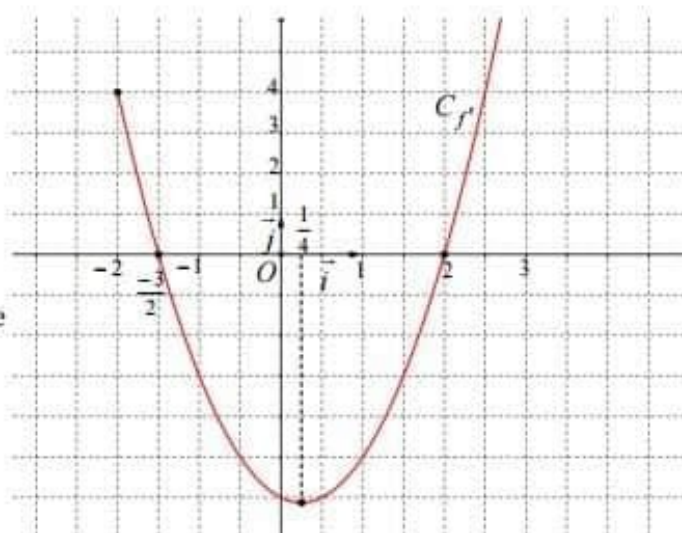
Soit f une fonction dérivable sur $[-2; +\infty[$.

On note f' sa fonction dérivée.

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe $C_{f'}$, représentative de la fonction f' dans un repère orthogonal.

La courbe $C_{f'}$ admet :

- Une branche parabolique de direction celle de la droite $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Une tangente horizontale en $\frac{1}{4}$.
- La courbe $C_{f'}$ passe par le point de coordonnées $(0, -6)$



- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x}$ et $f''\left(\frac{1}{4}\right)$
- 2) Montrer que f admet un extremum relatif en 2 dont on déterminera sa nature.
- 3) a - Donner le sens de variation de f sur $[-2; +\infty[$ en justifiant votre réponse.
b - Comparer $f(-1)$ et $f(1)$.
- 4) Montrer que la courbe C_f représentative de f admet un point d'inflexion dont on déterminera son abscisse
- 5) Sachant que la courbe C_f passe par le point O .
Déterminer une équation de la tangente à C_f au point O .
- 6) Déterminer les abscisses de points de C_f où la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation $y = -3x + 2$

Exercice N°2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x-1}$

Où a , b et c trois réels. on désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{ax^2 - 2ax - b - c}{(x-1)^2}$

b- On suppose que :

- La courbe ζ_f de f passe par le point $A(0; -7)$.
- f admet un extremum relatif en 3 est égal à 2.

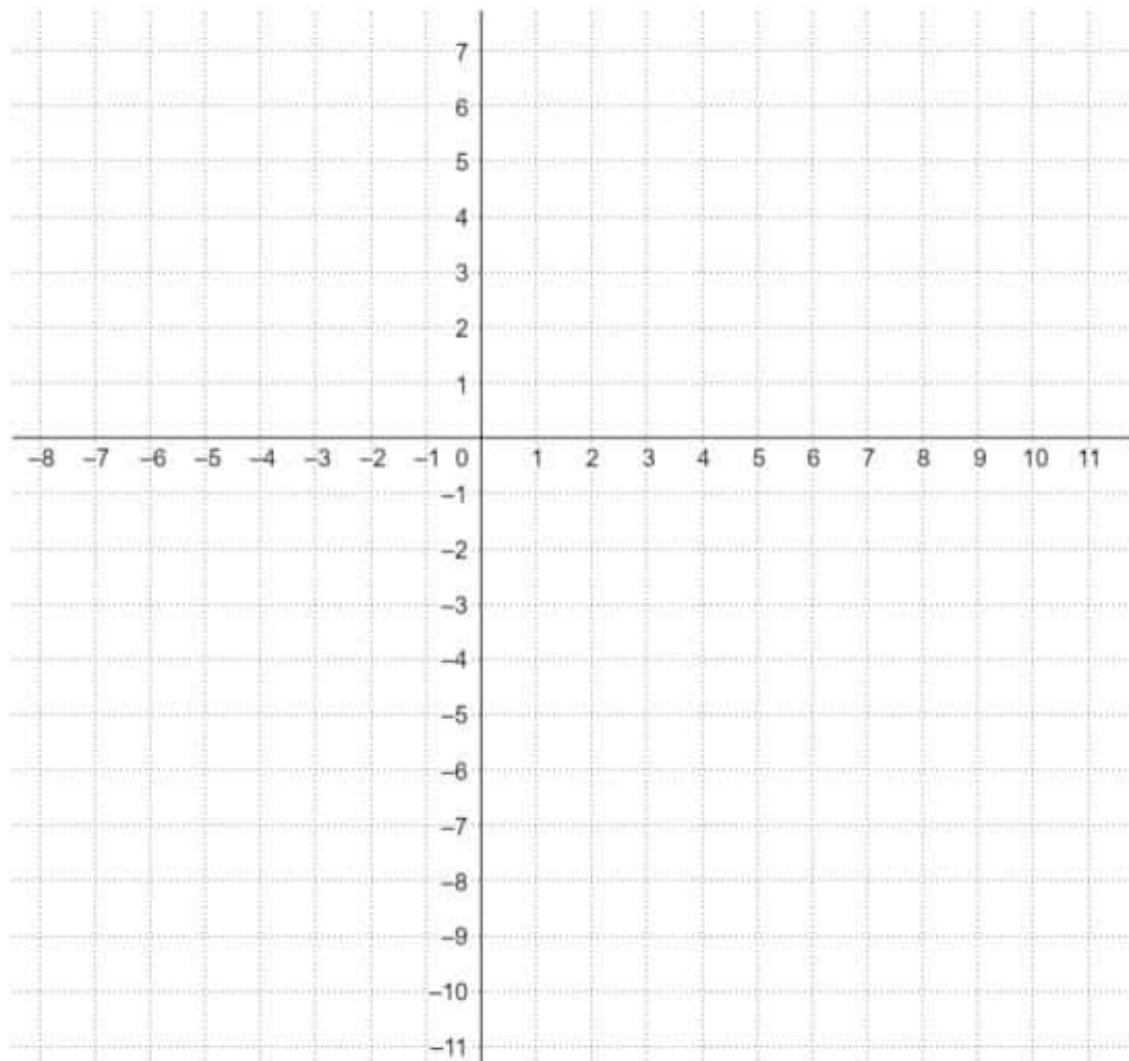
Déterminer les valeurs de a , b et c

- 2) On prend dans la suite $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x-1}$

a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.

- b- Dresser le tableau de variation de f .
- c- Préciser la nature des extremums de f .

- 3) a- Montrer que $D: y = x - 3$ est une asymptote oblique à ζ_f .
b- Etudier la position relative de ζ_f par rapport à D .
- 4) a- Montrer que $I(1, -2)$ est un centre de symétrie de ζ_f .
b- Donner une équation de la tangente à ζ_f au point d'abscisse 2.
- 5) Tracer D et ζ_f .
- 6) Dédire une construction de la courbe ζ_g représentative de la fonction $g: x \mapsto f(-x)$.
- 7) On considère la droite $\Delta_m: y = 5x + m$, où m est un paramètre réel.
 - a- Montrer que Δ_m coupe C_f en deux points distincts M' et M'' d'abscisse x' et x'' .
 - b- On désigne par I_m le milieu de $[M'M'']$.
 - Montrer que le point I_m a pour coordonnées $\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}m, \frac{5}{8} + \frac{3}{8}m\right)$.
 - Déterminer l'ensemble (E) des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.



Exercice N°3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-7}{x-3}$.

Soit (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Etudier le sens de variation de f .
b) Tracer (ζ) .
c) Montrer que (ζ) admet un centre de symétrie qu'on déterminera.
- 2) Soit $D_m : y = x - m$ (m est un paramètre réel).
a) Montrer que D_m coupe (ζ) en deux points distincts M' et M'' d'abscisse x' et x'' .
b) On désigne par I_m le milieu de $[M'M'']$.
Déterminer l'ensemble (E) des points I_m lorsque m varie.
- 3) Soit la fonction h définie par $h(x) = 2x + f(x)$.

ζ_h sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- a) Trouver trois réels a, b et c tel que : $h(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$; $\forall x \in D_h$.
- b) Montrer que la droite $D : y = ax + b$ est une asymptote à ζ_h .
- c) Etudier le sens de variation de h et construire ζ_h .
- d) discuter graphiquement le nombre de solution de $h(x) = m$.

Exercice N°4

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f_m(x) = \frac{x^2 + mx - 3}{x-1}$. Où m est un paramètre réel.

On désigne par C_m sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Préciser la fonction f_2 et la courbe C_2 .

Dans toute la suite on suppose que $m \neq 2$

- 2) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe A que l'on déterminera.
- 3) Déterminer $f'_m(x)$ et vérifier que $f'_m(x) = \frac{(x-1)^2 - (m-2)}{(x-1)^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- 4) Pour quelle valeur de m , f_m admet-elle un extremum local en 2 ?
- 5) Discuter suivant les valeurs de m , le nombre d'extremum de f_m ?
- 6) **On prend $m = 3$**
 - a - Déterminer les variations de f_3
 - b - Soit $\Delta : 3x - 4y + 13 = 0$, Déterminer les points de (C_3) où la tangente est parallèle à Δ .
- 5) **On prend $m = -3$** et soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{|x|(x-3) - 3}{x-1}$
 - a - Dresser le tableau de variation de f_{-3} .
 - b- Montrer que C_{-3} admet une asymptote oblique $\Delta : y = x - 2$ puis tracer C_{-3} .

- c- Etudier la dérivabilité de g en 0. Interpréter graphiquement les résultats
- d- Déterminer $g'(x)$ pour $x \in]-\infty, 0[$
- e- Dresser le tableau des variations de g
- f- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) + x - 2$. Interpréter
- f- Tracer à partir de la courbe C_{-3} la courbe C_g représentative de g .

Exercice N°5

Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x^2 - 5x + 4}{2x}$. ζ sa courbe représentative dans un repère $O.N(\vec{i}, \vec{j})$.

- 1- 1) Déterminer les réels a , b et c tel que $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x}$.
- 2) Montrer que la droite $\Delta : y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ est une asymptote à ζ .
- 3) Etudier la position de ζ par rapport à Δ .
- 4) Dresser le tableau de variation de f .
- 5) Montrer que $I(0, \frac{-5}{2})$ est un centre de symétrie de ζ
- 6) a) Ecrire une équation de la tangente T à ζ au point d'abscisse 1.
b) Montrer qu'il existe une seule tangente T' à ζ qui est // à T et déterminer une équation de T' .
- 7) Construire ζ , T et T' .
- 8) a) Soit $D_m : y = \frac{-3}{2}x + m$; m est un paramètre réel.
Discuter selon les valeurs de m le nombre des points d'intersection de ζ et D_m .
b) Dans le cas où D_m coupe ζ en deux points distincts M' et M'' d'abscisse x' et x'' , on désigne par H le milieu de $[M'M'']$. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points H lorsque m varie.
- 9) Soit $g(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 4}{2|x|}$
 - a) Montrer que g est paire.
 - b) Tracer à partir de (ζ) , la courbe (ζ') représentative de g dans le même repère.

Exercice N°6

Soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_m(x) = mx^4 - 2x^3 + (3 - 2m)x^2 + m$
où m paramètre réel.

On désigne par (C_m) la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A/ 1) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on précisera les coordonnées.

2) Dresser le tableau des variations de f_1 .

3) Soit l'équation : $(E_a) : x^4 - 2x^3 + x^2 = a$ où a est un paramètre réel.

En utilisant le tableau des variations de f_1 , déterminer les valeurs de a pour que (E_a) admet exactement quatre solutions.

4) Montrer que la droite $D : x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_1) .

B/ Dans toute la suite on prend : $m = 0$. On note $f_0 = f$ et $(C_0) = (C_f)$.

- 1) Dresser le tableau de variations de f
- 2) a- Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est un point d'inflexion de (C_f) .
 b- Donner une équation cartésienne de la tangente T à (C_f) au point I .
 c- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
 d- Tracer (T) et (C_f) dans le repère R .
- 3) Soit D_α la droite d'équation $y = \alpha x$ où α est un paramètre réel non nul.
 a- Déterminer, suivant les valeurs de α , le nombre de point(s) d'intersection de D_α et (C_f) .
 b- Lorsque (D_α) coupe (C_f) en deux points distincts M' et M'' autres que l'origine O du repère R , prouver que : $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM''} = \frac{\alpha(1+\alpha^2)}{2}$.
 c- Déduire les valeurs de α pour que le point $O \in [M'M'']$.
- 4) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2|x|^3 - 3x^2$.
 a- Etudier la parité de g .
 b- Tracer (C_g) à partir de (C_f) , expliquer.

Exercice N°7

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le point I de coordonnée $(1; 0)$.

M et N sont deux points du cercle C tels que (MN) perpendiculaire à (OI) et H est le point d'intersection des droites (OI) et (MN) .



On pose $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$.

- 1) Calculer l'aire du triangle MNI en fonction de x .
- 2) f est la fonction définie sur $[-1; 1]$ par : $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.
 a - Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1 et en 1 .
 b - En déduire une équation des tangentes à la courbe C_f représentative de f aux points d'abscisses -1 et 1 .
- 3) a - Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$.
 b - Dresser le tableau de variation de la fonction f .
- 4) Tracer la courbe C_f dans un repère orthonormé.
- 5) Pour quelle valeur de x l'aire du triangle MNI est-elle **maximale** ? Quelle est cette aire ?

Exercice N°8

1ère partie:

Soit la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x}$ et soit (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

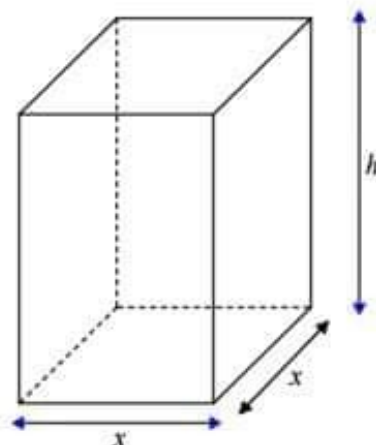
- 1) Déterminer a, b et c sachant que f admet un extremum local en 1 égal à 6 et la tangente à (ζ) au point d'abscisse -1 est parallèle à la droite $D: y = -8x + 1$.
- 2) On prend dans la suite: $f(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

a-Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$

b-Dresser le tableau de variation de f .

2ème partie:

On construit un réservoir fermé en tôle, ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, de hauteur h et dont la base est un carré de côté x . (l'unité de longueur est le mètre).



1) Exprimer l'aire S de la tôle utilisée et le volume V du réservoir en fonction de x et h .

2) On suppose que la capacité du réservoir est de $1m^3$.

a- Exprimer la hauteur h en fonction de x .

b- En déduire l'expression de S en fonction de x .

c- A l'aide de la première partie, déterminer x tel que l'aire S soit minimum.

Donner alors les dimensions du réservoir.

Exercice N°9

Sur la figure ci-contre est tracée la courbe représentative notée C_f d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .

- La droite D d'équation $y = 2x - 1$

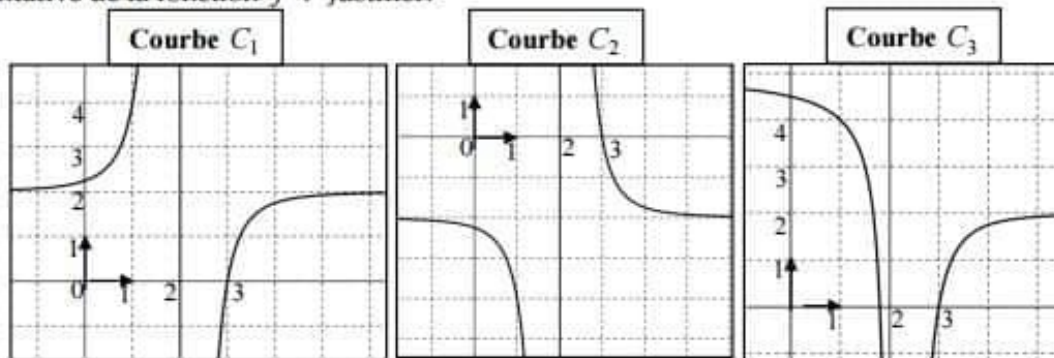
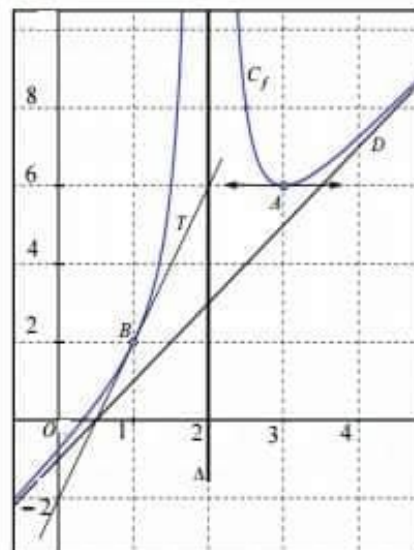
est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$;

- La droite Δ d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe C_f

À partir du graphique et des renseignements fournis :

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

2) Quelle est parmi les trois courbes tracées ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f' ? Justifier.



3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]-\infty, 2[$

4) On considère la fonction h définie sur $]2, +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

a - Déterminer les limites de h aux bornes de son domaine de définition.

b - Montrer que h est dérivable sur $]2, +\infty[$, puis dresser le tableau de variation de h .